ELEMENTI
DI ARITMETICA
E
DI ALGEBRA

DI

GIUSEPPE DE' SALLUSTJ

PRETE SECOLARE

AD USO

DE' GIOVANETTI

SECONDA EDIZIONE

RIVEDUTA E CORRETTA DALL'AUTORE

ROMA

Tipografia delle Belle Arti

1850

Romani pueri longis rationibus assem
Discunt in partes centum diducere. Dicat
Filius Albini: si de quincunce remota est
Uncia, quid superat? Poteras dixisse Triens; heu!
Rem poteris servare tuam . . . .

Q. Or. Flacco *De Arte Poetica*

Digitized by Google

ALL'ILLUSTRISSIMO E REVERENDISSIMO SIGNORE

MONSIGNOR TESTA

SEGRETARIO DE' BREVI

A' PRINCIPI DI NOSTRO SIGNORE

PAPA PIO VII

FELICEMENTE REGNANTE

MONSIGNORE

Il nuovo incarico, che mi sono io assunto d'istruire dei Signorini, i quali non sono ancor franchi nello scrivere, oltrechè nuocerebbe loro non poco, e l'impegno, che io ho d'altronde di erudirli in Teorìe adattate alla loro intelligenza, mi pongono nella necessità assoluta, ed indispensabile di stampare il *Corso di Matematica Elementare*, che aveva di già preparato pel Principino D. Ettore Pignatelli, giovanetto, che a non disprezzabili talenti congiunge un'indole, la quale corrisponde in tutto pienamente alla condizione dei nobilissimi di lui natali.

In questa occasione bramo di dare a V. S. Illma, e Rma colla Dedica di queste mie fatiche un pubblico attestato di quell'attaccamento speciale, che per tanti titoli Le professo: non meno che contestarle l'alta stima, che ho del suo merito impareggiabile come negli altri rami della Letteratura, così in ispecie nella Matematica, che amplamente possiede in tutte le sue parti.

Comprendo bene, che non troverà Ella in questa mia produzione un' Opera Classica di Matematica, la cui sola lettura potrebbe esserle di qualche piacere. Son certo peraltro, che vi troverà tutto ciò, che può formare un Corso di Matematica Elementare adattato alla capacità de'giovanetti, a'quali solo è diretto: sicuro, che col metodo da me tenuto si faciliterà non poco la loro intelligenza per l'esperimento da me fattone, allorchè con questo metodo spiegai consimili principj di Matematica nell'amatissima nostra Patria, ed altrove. E per questa facile intelligenza spero, che potranno gli studiosi giovanetti conseguire senza imbarazzo, e con pochissima pena i multiplici vantaggi dello studio della Matematica, quali sono, oltre le intrinseche cognizioni scientifiche della medesima, lo avvezzare i giovani colla sua acutezza ad essere sodamente riflessivi, e quindi imparar

loro, in forza della notissima di lei precisione, a ragionare con sano criterio, e a regolar sempre pensatamente con circospezione, e con prudenza ciascuna deliberazione della loro volontà tanto in materia di scienze, che nella loro vita privata, e civile.

Mi compatirà ancora, se non ho saputo bene in tutto imitare quel suo stile energico, che risplende assai mirabilmente in tutte le sue produzioni congiunto sempre ad una brevità, e precisione ammirabile. Giacchè la ristrettezza del tempo, e l'affollamento di più mie ingerenze nello sviluppare, ed adattare alla stampa questi miei principj di Matematica me ne hanno più volte distratto: e mi avran fatto forse ricedere da quel sanissimo precetto di Orazio.

Quidquid praecipies esto brevis, ut cito dicta
Percipiant animi dociles, teneantque fideles.
Omne supervacuum pleno de pectore manat.

Peraltro comunque siami disimpegnato nel mio assunto, sono sicuro, che non le spiaceranno le mie fatiche, per l'impegno se non altro, che ho d'istruire nelle lettere la gioventù, la cui cultura so esserle oltremodo a cuore. Ed in vista di queste sue disposizioni per l'istruzione della gioventù nelle lettere, mi prendo io la li-

Digitized by Google

bertà di fare a V. S. Illma, e Rma la Dedica di un'Opera, che ad una tale istruzione è stata appunto da me ordinata.

Prego pertanto la sua eminente bontà a volersi degnare di accettare questa mia disposizione, riflettendo, che tutto mancherebbe a questa mia Operetta, se l'inserzione venisse a perdere del conosciuto suo nome, di cui si gloriano i Letterati scientifici: e lo rispettano nella Matematica specialmente come quello di un loro inestimabile Collega, e Mecenate insieme. Ma io nulla dubito della sua accettazione in quanto La prego; sapendo aver ben'Ella bontà maggiore, per non disprezzare anche le minime offerte, e le picciole testimonianze, peraltro sincere, di rispetto, e di stima parziale, che ha l'onore di renderle, chi si ripete costantemente

Di V. S. Illma, e Rma

Dmo Obbl. Oss. Servo
GIUSEPPE DE'SALLUSTJ

PREFAZIONE

AGLI ELEMENTI DI MATEMATICA

1. La Matematica è una disciplina, che ha per oggetto la quantità: e tutte le scienze, che le proprietà, ed i rapporti considerano delle quantità, si devono alla Matematica riferire. Così la Meccanica, l'Astronomia, l'Ottica, ed altre simili scienze altro non sono, che l'applicazione della Matematica a diversi particolari oggetti.

2. Chiamasi quantità tutto ciò, che può fingersi, od è di parti realmente composto, ed è capace di aumento, o di diminuzione. Le parti poi delle quantità possono immaginarsi o discrete, o continue: vale a dire o separate, o unite fra di loro. Per esempio, un mucchio di arena è composto di parti discrete, e di parti continue un bastone. La quantità, che ha parti discrete espresse per numeri, forma l'oggetto dell'Aritmetica, e della Geometria quella, che le ha continue.

3. Da ciò apparisce, che l'Aritmetica, e la Geometria abbracciano tutte le matematiche discipline. Tratteremo noi brevemente di ambedue, accennandone le idee primarie, e la spiegazione di quei principj, che si stimeranno più necessarj ai nostri usi particolari.

Digitized by Google

4. Unitamente all'Aritmetica tratteremo anche dell'Algebra, che è un'Aritmetica universale, al dir di Newton: e colla Geometria uniremo la Trigonometria ancora, che è la scienza di applicare alla Geometria il calcolo Aritmetico.

Per procedere poi colla maggior precisione, e chiarezza, divideremo tutta l'Opera in due Volumi. Tratterà il primo Volume dell' Aritmetica, e dell'Algebra: ed il secondo tratterà della Geometria, e della Trigonometria. Vi uniremo poi una specie di Appendice della Geometria applicata all'Agrimensura, e ad altri pochi usi per un piccolo Saggio della sua utilità inesprimibile, avendo essa rapporto a quasi tutte le arti, e scienze naturali dell'uomo. Quindi ad incitamento de'giovani studenti alla coltura delle Matematiche, eccone la divisione, e Prospetto, che ce ne presenta nel principio del suo Volume l'Autore anonimo degli Elementi delle Matematiche Pure, secondo il metodo *De la Caille*.

Le Matematiche, dice egli, si dividono in *Pure*, e *Miste*. Le Matematiche *Pure*, sono quelle, che considerano le proprietà delle grandezze calcolabili, o misurabili in un modo *astratto*, senza rapporto ad oggetto alcuno particolare.

Le Matematiche *Miste* ossieno *Fisico-Matematiche* sono quelle, che considerano le proprietà delle grandezze calcolabili, o misurabili in *concreto* ossia nei corpi o soggetti particolari. Onde 3 in generale è un numero *astratto*, che non spe-

cifica oggetto: ma 3 uomini, o 3 alberi, che specifica l'oggetto, è numero *concreto*.

La *quantità astratta*, oggetto delle Matematiche *Pure*, è o *numerabile*, o *estesa*. La *quantità astratta numerabile* è divenuta l'oggetto *dell'Aritmetica*: e la *quantità astratta estesa* è l' oggetto *della Geometria*.

L'Aritmetica si divide in *Aritmetica numerica* propriamente detta, che vien trattata per mezzo di numeri o *cifre*, ed in *Algebra*, che si tratta *per lettere*, ed è in sostanza il calcolo delle grandezze in generale, le di cui operazioni altro non sono, che operazioni Aritmetiche in una maniera più compendiosa, ma di una estensione grandissima, ed illimitata, per cui meritò l' Algebra da Newton il nome specioso di *Aritmetica Universale*.

L'Algebra è *Elementare*, o *Infinitesimale*, secondo la natura delle quantità, alle quali si applica. L'*Algebra Elementare* è quale noi l'esporremo versata nei semplici, o puri elementi. L'*Algebra Infinitesimale* è, o *Differenziale*, o *Integrale*. È *Differenziale*, quando si tratta di scendere dall'espressione di una quantità finita, o considerata come tale, all' espressione del suo accrescimento, o della sua diminuzione istantanea. È poi *Integrale*, quando si tratta di rimontare da questa espressione alla medesima quantità finita.

La *Geometria* si divide anch'essa in *Elementare*, in *Trascendente*, ed in *Sublime*. La Geometria *Elementare* ha per oggetto primitivo le pro-

Digitized by Google

prietà del circolo, e delle linee rette. La *Trascendente* poi, e la *Sublime* abbracciano nelle loro multiplici speculazioni ogni sorte di curve.

Le *Matematiche Miste* hanno tanti rapporti ossieno divisioni, e suddivisioni, quanti sono gli esseri reali, ne'quali la quantità può essere considerata. Quindi regolano la *Meccanica*, che è la *quantità* considerata ne' corpi mobili, o tendenti a muoversi: ed ha due distinti rami di molta importanza, la *Statica*, e la *Dinamica*.

La *Statica* si versa su la quantità considerata ne'corpi in equilibrio, e tendenti soltanto a muoversi. La *Dinamica* si versa su la quantità considerata ne'corpi attualmente mossi.

La *Statica* si divide in *Statica propriamente detta*, che ha per oggetto la *quantità* considerata ne'corpi solidi in equilibrio, e tendenti solo a muoversi; ed in *Idrostatica*, che ha per oggetto la quantità considerata ne'corpi fluidi, e tendenti soltanto a muoversi.

La *Dinamica* dividesi anch'essa in *Dinamica propriamente detta*, che si versa su la *quantità* considerata ne'corpi solidi attualmente mossi: ed in *Idrodinamica*, che si versa su la *quantità* considerata ne'corpi fluidi attualmente mossi.

Ma se la *quantità* si considera nell'*acqua* attualmente, l'*Idrodinamica* prende il nome d'*Idraulica*. E poichè all'*Idrodinamica* si riferisce la *Navigazione*, ed alla *Meccanica* la *Balistica* o sia il getto delle *Bombe*; quindi anche nella *Navigazio-*

Digitized by Google

ne, e nella *Balistica* hanno un'assai onorevole dominio le *Matematiche Miste*.

Più di tutto però signoreggiano queste nell'*Astronomia*, e nell'*Ottica*. Poichè la *quantità* considerata nel movimento de'corpi celesti dà l'*Astronomia Geometrica*, d'onde procede la *Cosmografia* o *Descrizione dell'Universo*, la quale si divide in *Uranografia* o *Descrizione del Cielo*, in *Idrografia* o *Descrizione dell'acque*, ed in *Geografia*. Quindi ancora deriva la *Cronologia*, e la *Gnomonica* ossia l'arte di costruire gli Oriuoli o *Quadranti*.

L'*Ottica*, altro dominio grande delle *Matematiche Miste*, ha per oggetto la *quantità* considerata nella luce. Dalla *varietà* poi considerata nel movimento della luce nascono i differenti rami dell'*Ottica*, ed in conseguenza delle *Matematiche Miste*. La luce mossa in linea retta è l'oggetto dell'*Ottica* propriamente detta: la luce riflessa in un solo e stesso mezzo lo è della *Cattotrica*: la luce rotta nel passare da un mezzo in un'altro diverso, forma l'oggetto della *Diottrica*. All'*Ottica* si riferisce la *Prospettiva*.

La *quantità* considerata nel suono, nella sua veemenza, movimento, gradi, riflessioni, velocità ec. dà l'*Acustica*.

La *quantità* considerata nell'Aria, nel suo peso, movimento, condensazione, rarefazione ec. dà la *Pneumatica*.

La *quantità* considerata nella possibilità degli avvenimenti, somministra l'*Arte di congetturare*, donde nasce l'*Analisi de'Giuochi d'azzardo*.

Digitized by Google

Le Matematiche *Pure* hanno le stesse ripartizioni delle Matematiche *Miste* colla sola differenza, che le *miste* considerano gli oggetti in *concreto*, e le *pure* in *astratto*. Del che si vede, che le Matematichc abbracciano quasi tutte le cognizioni umane. Illuminano lo spirito a saper distinguere il vero dal falso, lo convincono delle verità già note, e lo ajutano a portare con intera certezza la perfezione in tutte le Scienze, che può l'uomo acquistare colla sua sola ragione.

Digitized by Google

DELL'

ARITMETICA E DELL'ALGEBRA

CAPO PRIMO

DELL' ARITMETICA.

5. L'Aritmetica è la scienza de'numeri. Il numero è il complesso delle unità: ed unità si appella qualunque solitaria parte di una quantità, che si finga in parti divisa. Se quanti sono i numeri possibili, tanti fossero i segni, dovrebbero questi essere infiniti.

6. L'ingegno umano ha ridotta questa multiplicità di segni alle dieci celebri cifre, che chiamansi arabe, le quali diversamente combinate esprimono tutti i numeri possibili.

ECCOLE

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
zero;	uno;	due;	tre;	quattro;	cinque;	sei;	sette;	otto;	nove.

7. Wolfio ha fatto vedere, che una tale utilissima invenzione è venuta dalle Indie in Arabia. Indi fu por-

Digitized by Google

tata in Ispagna dai Saraceni, ed il celebre Gelberto poi, il quale divenne Silvestro secondo Papa nel 999, la sparse in Francia, donde passò ad essere di uso universale in tutta la nostra Europa specialmente.

8. Non sappiamo, come gli antichi Romani calcolassero con quelle loro lettere assai note, che si chiamano numeri romani. Vediamo però, che le cifre arabe hanno facilitato immensamente l'Aritmetica.

9. Il 0 nulla significa quando è solo: ma posto a destra di un'altra cifra, fa crescerne dieci volte il valore. Se i zeri sieno due, lo fa crescere cento volte: se tre, mille: e così sempre in ragion decupla. Serve ancora il zero a conservare il valore locale delle altre cifre fra loro.

10. Le prime tre cifre a man destra di chi legge fanno la classe delle unità, le altre tre verso man sinistra fanno la classe delle migliaja, le altre tre dei milioni, e così in infinito. La prima nota della prima classe a man destra esprime unità, l'altra verso man sinistra esprime le decine, l'altra le centinaja, e così andranno crescendo le altre seguenti note sempre in ragion decupla. Con queste riflessioni si legge qualunque serie di numeri anche in infinito.

ESEMPIO

3. 2. 1.
8, 325, 846, 239, 475, 138, 247.

11. Riflettendosi ora dopo questi principj, che i numeri sono suscettibili di aumento, o diminuzione; è chiaro potersi soggettare a due sorti di operazioni, delle quali una li accresce, e l'altra li diminuisce. Tutte le altre operazioni dipendono da queste due fondamentali.

Digitized by Google

ARTICOLO I.

Delle operazioni dell'Aritmetica negl'interi.

12. Numero intero dicesi quello, che è composto di più unità complete della medesima specie: come per esempio 8 lire, 6 ducati, 9 scudi. Di tali numeri interi soltanto si tratterà nel presente Articolo.

Della somma.

13. La somma ossia addizione è un'operazione dell'Aritmetica, per mezzo della quale, date alcune quantità, se ne trova un'altra, che le adegui perfettamente.

14. Si eseguisce l'operazione, ponendo nelle diverse quantità da sommarsi le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, e così nel resto. Si tira quindi una linea sotto le quantità così disposte, e si scrive sotto di essa il risultato delle unità nella classe delle unità, delle decine, o centinaja nella classe delle decine, o centinaja ec.; badando sempre a trasportare in esse quelle decine, o quelle centinaja ec., che si sono avute dalle classi antecedenti.

ESEMPIO

$$\begin{array}{r} 6890 \\ 340 \\ 56 \\ \hline 7286 \end{array}$$

15. Per comprendere la dimostrazione di una tale operazione, basta solo riflettere, che unendosi insieme

tutte le parti di varj tutti; si ha l' aggregato perfetto dei tutti medesimi. Ma coll'aver fatto noi corrispondere nel totale aggregato della nostra somma i parziali aggregati delle unità, decine, centinaja ec. delle quantità date alle respettive loro classi delle unità, decine, centinaja ec.; si sono riunite insieme in esso aggregato totale tutte le parti delle quantità date. Dunque questo totale aggregato dà l'aggregato perfetto di tutte le parti delle quantità date.

16. Volendosi sperimentare, se siavi occorso qualche fallo nella operazione; si ripeta essa con ordine inverso: poichè ognuno comprende, che dovrà aversi lo stesso aggregato.

Della sottrazione.

17. La sottrazione è un'operazione dell' Aritmetica, per mezzo della quale, date due quantità, se ne trova la loro differenza.

18. Si eseguisce l'operazione, disponendo la quantità minore sotto la maggiore in guisa, che sieno le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, e così in appresso. Quindi, tirata una linea al disotto di esse, si osservi la differenza delle unità, e si scriva nella classe delle unità al disotto della linea tirata: di poi si osservi la differenza delle decine, e si scriva nella classe delle decine: e così si prosiegua, finchè avremo trascorse tutte le note, che devono sottrarsi, come nel seguente

ESEMPIO

8 4 5 7 6
1 2 5 4 6

7 2 0 3 0

19. La ragione dell' operato è facile a comprendersi, se si rifletta, che tutte le differenze parziali di due quantità unite insieme devono eguagliare la differenza totale di esse quantità. Ma operando noi nell'accennata maniera; abbiamo raccolte insieme sotto la linea tirata tutte le differenze parziali delle due date quantità. Dunque questa collezione di differenze parziali deve eguagliare la differenza totale, che hanno fra loro le due date quantità.

20. Talvolta accade, che una delle note del numero inferiore da sottrarsi sia maggiore della nota del numero superiore, da cui deve sottrarsi. In tal caso la nota del numero superiore si accrescerà di una decina, e la nota, che immediatamente le siegue, si considera come scemata di un'unità. La ragione di ciò si è, che crescendo il valore delle note numeriche degl'interi in ragion decupla da man destra verso sinistra; quindi è, che l'unità, che si prende dalla nota seguente, per darla all' antecedente, ha un valore di dieci rispetto ad essa nota antecedente; e perciò deve considerarsi sempre come 10, e non come unità semplice.

21. Volendosi sperimentare, se siasi operato rettamente, senza alcun fallo; si sommi la differenza trovata col numero sottratto. Poichè è chiaro, che la somma di queste due quantità debba eguagliare il numero maggiore della sottrazione.

Della Moltiplicazione.

22. La moltiplicazione è un' operazione dell'Aritmetica, per mezzo della quale, dati due numeri, se ne trova un terzo, il quale contenga tante volte uno dei due dati, quante volte l'altro di essi contiene l'unità.

23. Per esempio, moltiplicando 6 per 5, avremo

30, il quale contiene tante volte il 6, quante volte il 5 contiene l'unità: oppure il 30 contiene tante volte il 5, quante volte il 6 contiene l'unità.

24. Generalmente parlando, i due numeri della moltiplicazione si chiamano *fattori*. In particolare poi quello, che si moltiplica dicesi *moltiplicando*, e quello, per cui esso si moltiplica, dicesi *moltiplicatore*. Il numero, che ne risulta poi si chiama *prodotto*. Onde nel suddetto esempio 6 è il moltiplicando, 5 il moltiplicatore, e 30 il prodotto.

25. Per eseguire la moltiplicazione, convien porre i due dati numeri uno sotto dell'altro, e per lo più il minore sotto il maggiore. Quindi si tira al disotto di essi una linea, e si comincia l'operazione dalle unità del moltiplicatore da man destra verso sinistra, e si moltiplicano esse per tutte le note del moltiplicando da man destra parimenti verso sinistra. Lo stesso si fa colla seconda, e con tutte le altre note del moltiplicatore.

26. Si avverta primo, che siccome il valore dei numeri da man destra a sinistra cresce sempre in ragion decupla; quindi è, che il primo prodotto comincia dalle unità, il secondo dalle decine, il terzo dalle centinaja, e così in seguito. Sicchè i prodotti dovranno disporsi in guisa, che la prima nota del secondo prodotto si ponga sotto la classe delle decine, la prima nota del terzo prodotto sotto la classe delle centinaja, e così in appresso.

27. Si avverta secondariamente, che se nei prodotti parziali di ciascuna nota vi saranno delle decine, centinaja, o migliaja ec.; dovranno esse trasportarsi nelle respettive loro classi delle decine, centinaja, o migliaja ec.

Digitized by Google

ESEMPIO

```
  3 4 2
    5 6
  -------
  2 0 5 2
1 7 1 0
---------
1 9 1 5 2
```

28. Per comprendere la ragione dell'operato, deve riflettersi, che la moltiplicazione è un compendio della somma, in cui il moltiplicando avrebbe dovuto prendersi tante volte, quante volte il moltiplicatore comprende l'unità. Ora osservandosi la condotta dell' operato; si vede chiaramente, che il moltiplicando si è preso appunto da noi tante volte, quante volte il moltiplicatore contiene l'unità: come apparisce, dall'aver noi moltiplicato ciascuna nota del moltiplicatore per tutte le note del moltiplicando; dall'aver posto ciascun prodotto parziale di tali note nel suo debito luogo delle unità, delle decine, delle centinaja ec.; e dall'avere riuniti insieme nel prodotto totale tutti i prodotti parziali. Dunque questo prodotto totale contiene la somma del moltiplicando preso tante volte, quante volte il moltiplicatore contiene l'unità. Dunque colle nostre regole rettamente si opera.

29. Similmente la moltiplicazione è un'operazione dell'Aritmetica, per cui mezzo, dati due numeri, se ne trova un terzo, il quale contenga tante volte uno dei dati, quante volte l'altro dato contiene l'unità (23). Ma operandosi nella prescritta maniera; abbiamo in fine un prodotto, il quale contiene tante volte uno dei fattori, quante volte l'altro fattore contiene l' unità, come fa-

Digitized by Google

remo vedere per mezzo della divisione, che qui appresso esporremo. Dunque la moltiplicazione è stata rettamente eseguita.

30. Per vedere, se siasi operato senza alcun fallo, si ripeta l'operazione con ordine inverso, ponendo per moltiplicando il moltiplicatore, e per moltiplicatore il moltiplicando. Poichè come sono gli stessi fattori, così il prodotto ancora dovrà esser lo stesso.

TAVOLA PITTAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Procuri lo studente, nel fare la Moltiplicazione, di aver sempre presente la Tavola Pittagorica, finchè non avrà imparato francamente a memoria i prodotti delle nove cifre arabe ossia dei nove primi numeri moltiplicati in sè stessi, come nella Tavola suddetta.

Digitized by Google

Della divisione.

31. La divisione è un'operazione dell' Aritmetica, per cui mezzo, date due quantità, chiamate una *divisore*, e l' altra *dividendo*, se ne trova una terza chiamata *quoto*, la quale contenga tante volte l'unità, quante volte il dividendo contiene il divisore. Il *dividendo* è la quantità da dividersi: la quantità, per cui essa dividesi, si dice *divisore*: e si appella poi *quoto* la terza quantità, che dalla divisione risulta.

32. Nei numeri semplici la divisione si fa a colpo d' occhio; essendo manifesto per esempio, che 2 è contenuto nel 6 tre volte, e che 4 non è contenuto, sennon due volte in 8.

33. Che se il dividendo sia composto di molte note, e molto più se lo sia il divisore ancora, potrà adoperarsi questo metodo. Voglia, per esempio, dividersi 3 2 5 2 per 12. Si disponga prima di tutto del dividendo, e del divisore come nel seguente esempio. Quindi si prendano nel dividendo le due prime note, che sono 32, e si cerchi quante volte il divisore 12 entra, o è contenuto in 32. Si vedrà, che vi entra 2 volte coll'avanzo di 8. Sicchè si scriva 2 nel quoto. Quindi si moltiplichi il 2 pel divisore 12, ed il prodotto 24 si sottragga dalle due note divise 32. A destra dell'avanzo 8 si cali il 5, terza nota del dividendo, e si vegga quante volte il medesimo divisore 12 entri in 85, senza superarlo. Si vedrà, che vi entra 7 volte col residuo di 1. Onde si scriva 7 nel quoto. Di poi si moltiplichi 7 per 12, ed il prodotto 84 si sottragga dall'85, e vi rimarrà 1, alla cui destra si cali l' ultima nota del dividendo. Si vegga qui ancora quante volte il divisore 12 entri in 12, e si operi quindi nella stessa maniera, ponendo cioè l'una volta, che vi entra, nel quoto,

e proseguendo l'operazione, come al di sopra si è fatto delle altre note, e sarà terminata la divisione.

ESEMPIO

	1 2
3 2 5 2	———
2 4	2 7 1
——	
0 8 5	
8 4	
——	
0 1 2	
1 2	
——	
0 0	

34. In questo esempio il 3 2 5 2 è il dividendo, il 12 è il divisore, ed il 271 è il quoziente ossia quoto. Premesso questo schiarimento, ecco la ragione del nostro modo di operare nella divisione.

35. La divisione è un'operazione inversa della moltiplicazione. Poichè potendosi considerare il dividendo come un prodotto del divisore per il quoto; in questo caso la divisione dovrà sciogliere quello, che la moltiplicazione aveva composto, ed i loro modi di operare devono essere fra loro diametralmente opposti. Ma nella moltiplicazione il prodotto si ha; moltiplicando da destra a sinistra, e facendolo cresce sempre in ragion decupla verso essa sinistra. Dunque nella divisione il quoto deve trovarsi; dividendo da sinistra a destra, e facendo decrescere il dividendo da sinistra a destra sempre in ragion decupla.

36. Si scorge eziandio l'esposta ragione; rifletten-

Digitized by Google

dosi, esser proprietà essenziale della divisione, che il quoto contenga tante volte l'unità, quante volte il dividendo contiene il divisore. Ma secondo il nostro metodo di dividere altro non facciamo, se nonchè notare nel quoto tutte le volte, che il divisore è contenuto nel dividendo. Dunque il nostro quoto conterrà tante volte l'unità, quante volte il dividendo contiene il divisore, e noi avremo bene operato.

37. Nelle divisioni assai complicate sarà meglio di attenersi a quest'altro modo di oprare. Si metta il divisore a man sinistra del dividendo, e quindi si moltiplichi esso divisore per 2, per 3, per 4, per 5, per 6, per 7, per 8, per 9; formandone la serie dei prodotti, che nel seguente esempio si vedranno; quali prodotti potranno anche ottenersi per mezzo di una semplice somma. Poichè il secondo prodotto è il doppio del divisore dato, e gli altri nascono tutti successivamente dalla somma del dato divisore, e dell' ultimo dei prodotti, che si sono avuti: in questa guisa la divisione, che noi ora prescriviamo, riducesi ad una semplice somma, e sottrazione.

38. Dopo di aver così disposto il divisore, si prendano nel dividendo tante note, quante sono quelle del divisore, oppure una di più, se le note del divisore rappresentano una quantità maggiore: e fra i prodotti, che abbiamo formato nel divisore, si vegga qual più si accosti al valore di queste note prese nel dividendo, senza punto superarlo, e si ponga nel quoto il numero del posto, che esso prodotto occupa nella serie dei prodotti del divisore. Per esempio nel nostro caso alle quattro note 1 2 3 7 prese nel dividendo il prodotto, che più si accosta, è 1 0 2 8, il quale occupa nella serie il 4.° posto: ed io perciò pongo 4 nel quoto. Quindi il prodotto 1 0 2 8 lo pongo sotto le note prese nel divi-

dendo, e colla sottrazione ne noto la differenza. A man destra di questa differenza calo la nota prossima del dividendo: ed avendomi questa dato 2 0 9 0; veggo, che il più, che a questa quantità si accosti, è il 2 0 5 6, il quale occupa l'8.° posto. Dunque io pongo 8 nel quoto, ed opero quindi come di sopra si è detto: e così proseguirò, finchè vi saranno note da dividersi.

Divisore.	*Dividendo.*	*Quoto.*
1 . . . . 2 5 7	1 2 3 7. 0 1 2 0 1 0 2 8	4 8 1 3 2 $\frac{196}{257}$
2 . . . . 5 1 4		
3 . . . . 7 7 1	0 2 0 9. 0 2 0 5 6	
4 . . . 1 0 2 8	0 0 3 4. 1	
5 . . . 1 2 8 5	2 5 7	
6 . . . 1 5 4 2	8 4. 2 7 7 1	
7 . . . 1 7 9 9	7 1. 0	
8 . . . 2 0 5 6	5 1 4	
9 . . . 2 3 1 3	1 9 6.	

39. Si avverta in primo luogo, che comunque si faccia la divisione, o nel primo, o nel secondo modo; per cominciarla, si prenderanno sempre nel dividendo tante note, quante sono quelle del divisore: e tutte le volte, che, prese nel dividendo tante note, quante sono quelle del divisore, il divisore si trovi maggiore del valore di queste note; dovrà allora prendersi una nota di più nel dividendo, e così cominciarsi la divisione.

40. Si avverta in secondo luogo, che se nell'operazione si trovi un qualche resto, il quale anche dopo

l' aggiunta della nota calata sia minore del divisore; allora si porrà zero nel quoto: quindi si calerà un'altra nota del dividendo a destra di esso resto, e così si proseguirà l'operazione. Eccone un

ESEMPIO

```
               7 2
1 4 5. 9 0 ———————46
1 4 4        2 0 2——
———————            72
0 0 1. 9. 0
    1 4 4
    —————
    0 4 6.
```

41. Siccome è assai facile l'inavvertenza nei calcoli numerici; si è trovata la maniera di rimediarci con alcuni espedienti, che chiamansi prove. Oltre quelle, che abbiamo accennate, la prova della somma si fa anche colla sottrazione, e la prova della sottrazione si fa colla somma: così pure la prova della moltiplicazione si fa colla divisione, e quella della divisione si fa colla moltiplicazione, come faremo vedere in pratica, per non perder tempo a fare una diceria inutile.

42. Giovanni Nepero Barone Scozzese in Marchistan inventò alcune Laminette, che dal suo nome furon dette *neperiane*, per mezzo delle quali può farsi la moltiplicazione senza l'ajuto dell'Abbaco Pitagorico, e la divisione senza l'imbarazzo delle prescritte regole: mentre si trovano fatte nelle Laminette medesime combinate come si deve.

43. La Tavola Neperiana, da cui formansi quelle Laminette, è la stessa Tavola Pitagorica con questa sola differenza, e cambiamento, che i piccoli quadrati, ove

Digitized by Google

contengonsi i prodotti dei numeri semplici, si dividono per mezzo di una diagonale, la quale vada da alto in basso, da sinistra a destra. Quindi i numeri semplici di una sola figura si scrivono nel triangolo a man destra, rimanendo voto l'altro a man sinistra. Ove poi occorrono i numeri composti di due figure, si pongono le unità nel triangolo a man destra, e le decine nel triangolo a sinistra.

44. La maniera poi di fare le Laminette, di combinarle, e di adoperarle nelle operazioni della moltiplicazione, e divisione, si farà vedere in pratica.

Digitized by Google

TAVOLA NEPERIANA

./1	./2	./3	./4	./5	./6	./7	./8	./9
./2	./4	./6	./8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
./3	./6	./9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
./4	./8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
./5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
./6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
./7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
./8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
./9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

ARTICOLO II.

Delle Frazioni.

45. Non vi è quantità, la quale non sia divisibile in parti, come pure non trovasi unità, che non possa immaginarsi composta di un certo numero di parti fra loro eguali. Per esempio una tesa, o pertica è composta di 6 piedi, un piede di 12 pollici, un pollice di 12 linee, una linea di 12 punti. Dunque quando si dice $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ di tesa, s'intende dire, che di una tesa si prendono due, tre, o quattro parti.

46. Da ciò si comprende cosa sia frazione. Può essa definirsi nel senso più esteso: *una divisione indicata*: e nel senso più stretto, e come opposta al numero intero, *è essa una divisione indicata*, *che non può consumarsi*. Succede ciò, quando si prenda una, o più parti dell' unità, le quali unite insieme non giungano ad eguagliare l'unità medesima.

47. Si scrive la frazione, ponendo al disopra di una linea orizzontale una nota, che esprime il numero delle parti, che si voglion prendere, e al disotto della stessa linea si pone un'altra nota, che esprime la specie delle parti da prendersi: come se siano, per esempio, parti 3^e; 4^e; 5^e. Il primo numero posto al di sopra chiamasi *numeratore*; perchè numera le parti, che si voglion prendere, e quello posto al di sotto della linea orizzontale dicesi *denominatore*: perchè esprime, e denomina la specie di esse parti. Nel seguente esempio 2, e 3 sono i numeratori; 5, e 7 sono i denominatori di queste due

Frazioni

$$\frac{2}{5}\,;\;\frac{3}{7}$$

48. Due frazioni saranno eguali fra di loro, se il numeratore di una avrà al suo denominatore il medesimo rapporto, che ha il numeratore dell' altra al suo respettivo denominatore: cioè se il numeratore di una sia contenuto nel suo denominatore tante volte, quante volte il numeratore dell'altra è contenuto nel suo denominatore. Poichè nella frazione vera il numeratore si può considerare come parte del denominatore, ed il denominatore come un intero diviso in parti. Se dunque i numeratori di due frazioni saranno contenuti egualmente nei loro respettivi denominatori; saranno essi parti eguali di un medesimo tutto, ed in conseguenza le dette frazioni esprimeranno quantità eguali: come chiaramente si osserva nel seguente

ESEMPIO

$$\frac{1}{2}\,;\;\frac{2}{4}\,;\;\frac{5}{10}\,;\;\frac{10}{20}$$

49. Quando poi osserviamo, che in due frazioni il numeratore di una entra meno volte nel suo denominatore, di quello che il numeratore dall'altra entra nel suo denominatore; la prima frazione esprimerà una quantità maggiore, e la seconda esprimerà una quantità minore. Poichè la prima frazione esprimerà una parte maggiore di uno stesso tutto, che è l' unità. Per esempio nelle seguenti frazioni la prima esprime una quantità maggiore delle altre.

ESEMPIO

$$\frac{2}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{2}{7}$$

50. Posti questi necessarj principj sulla natura delle frazioni, sarà cosa giovevole assai per brevità dai calcoli, trattare prima di ogn' altra cosa della maniera di ridurre le frazioni alla minima espressione. Quindi, per non confondere una Teorìa coll'altra, tratteremo immediatamente delle altre riduzioni ancora, alle quali vanno soggette le frazioni.

Delle riduzioni delle Frazioni.

51. Essendovi delle frazioni espresse con multiplicità di figure, le quali peraltro possano ridursi ad espressione minore; noi per ottener ciò ci atterremo a questo metodo generale. Si divida cioè il numero maggiore, sia numeratore, o denominatore della frazione da ridursi, pel numero minore della stessa frazione, e se ne noti il residuo. Quindi si divida il numero minore per questo residuo: e così si prosiegua, finchè un divisore entri esattamente nel dividendo, e questo tal divisore sarà il massimo divisor comune, con il quale dividendosi tanto il numeratore, che il denominatore della data frazione; si ridurrà essa alla maggior semplicità possibile.

Per esempio nella frazione $\frac{161}{207}$ si dividerà il 207 per 161: quindi il 161 si dividerà pel resto 46: e questo medesimo 46 si dividerà pel resto 23, il quale troveremo, che vi entra due volte giuste senza residuo alcuno. Sicchè il 23 sarà il massimo divisor comune del-

la data frazione, e con esso 23 divideremo tanto il numeratore 161, quanto il denominatore 207, e la frazione $\frac{161}{207}$ si ridurrà a $\frac{7}{9}$, che ne è la minima espressione.

52. Esaminando noi l'accennato esempio; troviamo, che il numero rinvenuto nell'indicata maniera è il massimo divisor comune. Poichè, che sia esso il *divisor comune*, è chiaro: giacchè se il 23 misura esattamente il 46, misurerà esattamente anche il 161, che è un composto di tre 46 coll' aggiunta di 23. Quindi se il 23 misura esattamente il 161, ed anche il 46; misurerà esattamente il 207, che è composto di 161 coll'aggiunta di 46. Sicchè il 23 è il *divisor comune* della data frazione. Che poi sia il divisore *massimo* si dimostra con ordine retrogrado; essendo chiaro, che nè il 161, nè il 46 dividono esattamente.

53. La ragione poi di questa regola di trovare il massimo divisor comune è fondata in questo, che due quantità non sono esattamente divisibili per uno stesso numero, se non quando sono esse prodotti esatti del medesimo numero.

54. Oltre il prescritto metodo generale di ridurre una frazione a minore espressione, sonovi altre quattro maniere, delle quali eccone la prima.

Allorchè ambedue i membri della frazione terminano con un numero pari; saranno divisibili per 2, e così si ridurranno alla minima espressione. Quindi la frazione $\frac{128}{432}$ dividendola per 2, si ridurrà a $\frac{8}{27}$.

55. Allorchè i membri della frazione finiscono per 0; la frazione sarà divisibile per 10, e così si ridurrà alla minima espressione. Onde $\frac{20}{40}$ riducesi a $\frac{2}{4}$.

56. Se i membri della frazione finiscono per 5;

allora la frazione sarà divisibile per lo stesso 5: e perciò la frazione $\frac{15}{85}$ si ridurrà a $\frac{3}{17}$.

57. Se finalmente sommando noi ciascun membro della frazione separatamente uno dall'altro, abbiamo un multiplo di 3; allora sarà la frazione divisibile per esso 3. Onde $\frac{288}{351}$ riducesi a $\frac{32}{39}$.

58. Facendo attenzione agli esposti esempj nelle quattro descritte regole; troviamo, che ogni membro di ciascuna frazione è *multiplo* del suo respettivo divisore, e per questa ragione i medesimi membri rimangono da esso divisore esattamente divisi. Poichè un numero dicesi *multiplo* di un' altro, quando possa per esso esattamente dividersi; facendo così vedere, che nasce il medesimo dalla moltiplicazione del quoto pel numero, che lo divide.

59. Passando ora per compimento di queste Teorie alle altre riduzioni, alle quali vanno soggette le frazioni; dee in primo luogo notarsi, avvenir talora, che debba ridursi una frazione ad un *Denominator dato*: come sarebbe, per esempio, se $\frac{2}{3}$ di ora volessero ridursi a minuti, che sono sessantesimi di ora: vale a dire se la frazione $\frac{2}{3}$ voglia ridursi ad un'altra frazione, il di cui denominatore sia 60. Per ottener ciò, si moltiplichi il denominatore 60 pel numeratore 2 della data frazione: il prodotto 120 si divida pel denominatore 3 della data frazione, ed il quoto 40 ci darà il numeratore della nuova frazione cercata, avente per denominator 60. Così $\frac{2}{3}$ di ora saranno eguali a $\frac{40}{60}$, ossia a 40 minuti.

60. La ragione dell'operato dipende dalle propor-

Digitized by Google

zioni geometriche, e dalla regola del *Tre*. Poichè noi altro non abbiamo fatto, che formare coi dati numeri questa proporzione, cioè; 3 : 60 : : 2 : x, ossia il denominatore della data frazione sta al denominator dato della nuova ricercata frazione; come il numeratore della data frazione al numeratore cercato della nuova richiesta frazione. Qual sia poi la natura, e la proprietà di tali proporzioni, e come in esse si operi, lo farò vedere per ora colla sola pratica, affine di non anticipare qui la spiegazione delle respettive teorie delle proporzioni, che con più chiarezza a suo luogo vedremo (208).

61. Spesso ancora succede, che una frazione data debba ridursi ad un'altra frazione, che abbia un *dato numeratore*: come se per esempio $\frac{3}{5}$ di una lira vogliano ridursi ad una frazione, il cui numeratore sia 12. In questo caso si moltiplicherà il denominator 5 della data frazione per il dato numerator 12 della nuova frazione cercata, ed il prodotto 60 si dividerà per il numeratore 3 della data frazione. Quindi il quoto 20 ci darà il denominatore della da noi ricercata frazione, che ha per numeratore il dato 12. Onde la frazione data $\frac{3}{5}$ di una lira diverrà eguale a $\frac{12}{20}$, vale a dire a dodici soldi.

62. La ragione dell'operato in questo caso ancora dipende dalle proporzioni geometriche, che in appresso vedremo. Poichè coi dati numeri, e secondo ciò, che in seguito diremo dei termini *omologi* delle proporzioni, dei termini cioè, che si corrispondono gli uni agli altri nella proporzione, noi istituiremo questa proporzione 3 : 12 : : 5 : x, cioè il numeratore della data frazione sta al numeratore dato della nuova ricercata frazione; come il denominatore della data frazione sta al

denominatore incognito della nuova ricercata frazione. In appresso si spiegheranno, e si capiranno chiaramente, e con molta facilità tali principj (184).

63. Si avverta intanto primieramente, che tanto la riduzione presente, che la passata hanno luogo in quei casi soltanto, nei quali il numero dato è *multiplo* del suo termine *omologo*, che ha nella frazione da ridursi. In secondo luogo si avverta, che si adoprano tali riduzioni di frazioni, per determinare più esattamente il valore delle medesime frazioni.

64. Un numero dicesi *multiplo* di un altro, quando possa per questo esattamente dividersi: giacchè sarà eguale al prodotto del quoto pel divisore, di cui è multiplo. Onde 8 è multiplo di 4, e di 2: come si è già di sopra avvertito (58).

65. Due termini poi si dicono *omologi*, quando significano la stessa cosa, e si corrispondono uno all'altro vicendevolmente. Onde in una proporzione i numeratori sono sempre omologi fra loro, come lo sono anche i denominatori fra loro stessi. Sicchè in queste due frazioni $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ il 2 è omologo del 4; come il 3 è omologo del 5.

66. Talvolta accade, che nelle operazioni delle frazioni si trovino meschiati de'numeri interi ancora. Dovendosi dunque in questo caso trattare gl' interi come frazionarj; conviene perciò sapersi, che l'intero si riduce a frazionario in tre modi.

1.° Qualunque intero si riduce a frazionario, col mettervi l'unità per denominatore: onde 8 si riduce a frazionario così $\frac{8}{1}$, che vale per 8 interi.

2.° Volendosi ridurre un intero a frazionario, che abbia un dato denominatore; deve moltiplicarsi esso intero pel dato denominatore, ed allora porremo il pro-

Digitized by Google

dotto per numeratore, ed il dato denominatore sarà il denominatore della da noi cercata frazione: onde 8 si riduce ad una frazione, che abbia per denominatore 6 così $\frac{48}{6}$, che vuol dire 8 interi: perchè 48 diviso per 6 dà appunto 8 interi.

3.° Se voglia ridursi un intero, ed un fratto ad una sola frazione, si moltiplicherà l'intero pel denominatore del fratto, ed al prodotto si aggiungerà il numeratore del fratto. Quindi un tal prodotto così accresciuto sarà il numeratore della nuova frazione, avente per denominatore lo stesso denominatore della data frazione: così $5\frac{3}{4}$ si ridurrà a $\frac{23}{4}$; e $6\frac{2}{5}$ a $\frac{32}{5}$, che è lo stesso di $6\frac{2}{5}$, come ognun vede.

67. L'ultima riduzione, che resta a farsi nelle frazioni, è quella di ridurre esse medesime frazioni alla stessa specie: atteso che non può eseguirsi la somma, e la sottrazione, se le frazioni non siano della medesima specie: cioè se non abbiano il medesimo denominatore, che è quello, il quale ci indica la specie di esse frazioni (47).

68. Se le frazioni sian due, noi le ridurremo ad un'istesso denominatore, col moltiplicare il numeratore di una pel denominatore dell'altra, ed i denominatori fra di loro. Il primo prodotto ci darà il numeratore della nuova frazione, ed il secondo ce ne darà il denominatore: onde $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ si ridurranno coll'accennata maniera a $\frac{8}{12}$; $\frac{9}{12}$.

69. Se poi siavi un maggior numero di frazioni; si moltiplichi il numeratore di ciascuna di esse per tutti

i denominatori delle altre, eccettuato il proprio, ed i denominatori si moltiplichino anch'essi successivamente fra loro, i primi prodotti saranno i numeratori delle nuove frazioni, il cui denominatore sarà il secondo prodotto nato dalla moltiplicazione dei denominatori fra loro. Onde le frazioni $\frac{5}{9}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{5}$ si riducono a $\frac{175}{315}$; $\frac{180}{315}$; $\frac{189}{315}$.

70. Operando in tal modo; abbiamo delle nuove frazioni eguali alle prime, sebbene espresse con diversi numeri, ed aventi un medesimo denominatore. Poichè noi con questo modo di operare abbiamo moltiplicato in ciascuna frazione tanto il numeratore, quanto il denominatore per la medesima quantità. Rimane dunque il medesimo rapporto, che vi era prima. Dunque le nuove frazioni saranno eguali relativamente alle prime; benchè si trovino espresse con diversi numeri.

Della Somma.

71. Dopo queste Teorie, rimane facile la somma, e la sottrazione delle frazioni. Per eseguir la somma, ridotte che sieno le frazioni al comun denominatore, si uniscano in un solo aggregato i numeratori di esse, e vi si scriva sotto, mediante una linea, il denominator comune, e sarà fatta la somma, come si deve.

ESEMPIO

$$\frac{5}{9}+\frac{4}{7}+\frac{3}{5}=\frac{175}{315}+\frac{180}{315}+\frac{189}{315}=\frac{544}{315}.$$

72. Si avverta ora per sempre, che il segno +

vuol dire *più*: il segno —, che si troverà fra un membro, e l'altro, ossia fra una frazione, e l'altra della seguente sottrazione, vuol dir *meno*: ed il segno = vuol dire *eguale*. Sono questi segni di Algebra, di cui facciamo quì uso per nostro comodo.

73. Se accada, che le frazioni sieno unite con numeri interi; in tal caso si uniranno gl'interi in una somma, e vi si aggiugnerà poi la somma delle frazioni nel modo accennato, trasportando all'aggregato degl' interi quegli interi, che risulteranno dalle frazioni. Quindi è, che le frazioni $10\frac{3}{4} + 2\frac{4}{5}$ saranno eguali a $13\frac{11}{20}$

Della Sottrazione.

74. La sottrazione si fa, riducendo prima le frazioni da sottrarsi al comun denominatore: quindi prendendo la differenza dei numeratori per numeratore della nuova frazione, e ponendovi il denominator comune per denominatore.

ESEMPIO

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3}, \text{ ossia } \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

75. Se le frazioni abbiano uniti degl'interi; questi devono sottrarsi fra di loro, ed al residuo si ascriverà la differenza delle frazioni. Onde se da $4\frac{3}{4}$ debba sottrarsi $3\frac{1}{2}$; primieramente riducendola al comun denominatore, sarà $4\frac{6}{8} - 3\frac{4}{8}$: di poi sottraendo, avremo la differenza $= 1\frac{2}{8}$.

76. Se poi accada, che la frazione da sottrarsi sia maggiore di quella, da cui deve sottrarsi; allora la frazione minore si deve accrescere di una unità presa dall' intero, a cui si suppone annessa la medesima frazione. Per esempio, se da $6\frac{1}{4}$ debba sottrarsi $3\frac{2}{3}$; primieramente si riduca la frazione $6\frac{1}{4}$ a $5\frac{5}{4}$ di poi si riducano le due frazioni al denominator comune, ed avremo $5\frac{15}{12} - 3\frac{8}{12}$: finalmente, fattane la sottrazione, avremo $2\frac{7}{12}$ di differenza.

77. Se per ultimo accada, di dover sottrarre una frazione da un intero; altro non dovrà farsi, sennonchè ridurre l'intero a fratto con quello stesso denominatore, che sta nella data frazione. Onde volendosi sottrare $\frac{2}{3}$ da 5; si ridurrà primieramente il 5 a $4\frac{3}{3}$: di poi si sottragga da $4\frac{3}{3}$ la data frazione $\frac{2}{3}$, ed avremo $4\frac{1}{3}$ di differenza.

Della Moltiplicazione.

78. La moltiplicazione si eseguisce, col moltiplicare il numeratore di una frazione per quello dell'altra, ed il denominatore di una per quello dell'altra. Il primo prodotto sarà il numeratore, ed il secondo il denominatore della nuova frazione. Eccone un esempio, ove $\times$ è segno di moltiplicazione.

ESEMPIO

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

79. La ragione di questa maniera di operare si apprende facilmente dall'avvertire, che nella moltiplicazione deve prendersi il moltiplicando tante volte, quante volte il moltiplicatore contiene l'unità. Ora il moltiplicatore nel nostro esempio contiene una metà soltanto dell'unità. Dunque il moltiplicando deve prendersi per la metà soltanto di se stesso. Ma prendendosi la metà di $\frac{2}{3}$; noi abbiamo $\frac{1}{3}$. Dunque nella moltiplicazione si è rettamente operato.

80. Nè faccia maraviglia, se nella moltiplicazione delle frazioni proprie il prodotto apparisce sempre minore di ognuno dei fattori. Poichè nella moltiplicazione delle frazioni ancora il prodotto esprime quante volte siasi preso uno dei fattori a tenore delle unità, che si trovano nell' altro fattore. Ora nelle frazioni proprie niun fattore contiene l'unità intera: e però nella moltiplicazione delle frazioni proprie niun fattore può prendersi interamente, ma bensì per una parte soltanto di se stesso, e questo deve esprimersi nel prodotto. Il prodotto dunque, dovendo esprimere, che ognuno dei fattori è stato preso per una parte soltanto di se stesso; deve conseguentemente apparire sempre minore di ognuno dei suoi due fattori.

81. Si deve peraltro riflettere, che un tal prodotto, sebbene apparisca minore di ognuno dei suoi fattori; pure in sostanza è del tutto maggiore. E ciascuno si persuaderà di ciò facilmente, se rifletta, che per mezzo della moltiplicazione le quantità mutano la loro natura: cosicchè da semplici diventano quadrate, se si moltipli-

chino in se stesse. Dal che avviene, che se nella moltiplicazione delle frazioni proprie il prodotto, che sembra minore di ciascheduno dei suoi fattori, si ridurrà a parti quadrate, si troverà del tutto maggiore dei medesimi suoi fattori, ed accurato.

82. Ed in vero, contenendo ogni soldo 12 denari, ne nasce, che $\frac{2}{3}$ di un soldo formino 8 denari, ed $\frac{1}{2}$ di un soldo formi 6 denari. Moltiplicando ora 8 per 6, abbiamo 48 denari: e questo è appunto il prodotto, che ci daranno $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$. Poichè il prodotto che noi avremo, moltiplicando secondo il prescritto metodo $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, è certamente $\frac{1}{3}$ di un soldo; ma un terzo peraltro di un soldo quadrato, il quale contiene 144 denari, come chiaramente apparisce dalla moltiplicazione di 12 per 12. Ma $\frac{1}{3}$ di 144 denari dà 48 denari. Dunque il prodotto, che si ha moltiplicandosi le frazioni proprie secondo la surriferita regola, sebbene apparisca assai minore dei suoi fattori, e del giusto; non ostante è del tutto maggiore dei suoi fattori, ed accurato.

Della Divisione.

83. La divisione nelle frazioni si fa coll'invertire prima i membri del divisore, mettendo il numeratore per denominatore, e per denominatore il numeratore: e quindi moltiplicando i numeratori fra loro, che ci daranno il numeratore della nuova frazione, e moltiplicando poi i denominatori fra loro, che ci daranno il denominatore di essa nuova frazione: oppure si fa, mol-

tiplicando il numeratore del dividendo pel denominatore del divisore, e il denominatore del dividendo pel numeratore del divisore. Il primo prodotto sarà il numeratore, ed il secondo sarà il denominatore della nuova frazione: come nota il seguente esempio, in cui i due punti, che stanno fra un membro, e l'altro, sono segni di divisione, ed indicano, che $\frac{3}{4}$ deve dividersi per $\frac{1}{2}$.

ESEMPIO

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{6}{4}.$$

84. Si scorge apertamente la ragione di una tale operazione, se si attenda la natura della divisione. Poichè nella divisione il dividendo deve contenere tante volte il quoto, quante volte il divisore contiene l'unità. Ma nell' esposto esempio il divisore non contiene, che mezza unità. Dunque anche il dividendo non deve contenere, che mezzo quoto: vale a dire, che il quoto deve essere il doppio del dividendo per quel che porta l'apparenza, come nel nostro caso.

E volendo generalizzare questa ragione; diremo, che nella divisione il dividendo deve contenere tante volte il quoto, quante volte il divisore contiene l'unità. Ma trattandosi di frazioni proprie, il divisore contiene sempre una parte soltanto dell'unità. Dunque il dividendo ancora deve sempre contenere una parte soltanto del quoto, che apparirà perciò sempre maggiore del dividendo.

85. Deve peraltro avvertirsi, che nella divisione delle frazioni proprie, se il quoto si osserva maggiore sempre del dividendo; lo è in apparenza soltanto. Poichè facendone l'analisi, troviamo, che il dividendo anzi

è maggiore sempre del quoto. Di fatti $\frac{3}{4}$ di un piede divisi per $\frac{1}{2}$ corrispondono a $\frac{9}{12}$ divisi per $\frac{6}{12}$ di pollici, e fattane la divisione nel prescritto modo, si avrà per quoto $\frac{108}{72}$ di pollici, che corrispondono ad un pollice, e mezzo. Ma trovasi, che il dividendo $\frac{3}{4}$ analizzato comunque corrisponde a $\frac{9}{12}$, ossia a 9 pollici. Dunque il quoto, che pareva maggiore del dividendo, coll'analisi si trova minore.

Da ciò si scorge ancora, che nel prescritto metodo di dividere le frazioni intattissime rimane la proprietà notissima della divisione, quale è quella di sciogliere il dividendo in due fattori, che sono il divisore, ed il quoto. Di fatti il quoto trovato da noi è $1\frac{1}{2}$, che riducesi a $\frac{3}{2}$ (66): ed il divisore era $\frac{1}{2}$. Ma moltiplicando $\frac{3}{2}$ per $\frac{1}{2}$; abbiamo $\frac{3}{4}$, ossia il dividendo accennato. Dunque il divisore, ed il quoto sono i due fattori del dividendo, di cui trattasi.

Per compimento di quest'analisi riflettiamo in fine, che la frazione $\frac{3}{4}$ di un piede corrisponde a 9 pollici (47): e che $\frac{1}{2}$ di un piede corrisponde a 6 pollici. Ma dividendo 9 per 6, abbiamo un pollice, e mezzo: cioè quello stesso quoto, che si è avuto, facendo la divisione nel modo da noi prescritto. Dunque questo modo di dividere è retto, ed accurato del tutto.

ARTICOLO III.

Delle Frazioni Decimali.

86. Oltre le frazioni semplici, delle quali si è parlato finora, sonovi anche delle frazioni, che si dicono *decimali*. Frazioni decimali, si dicono quelle, che hanno per denominatore l' unità con tanti zeri, quante sono le note del numeratore: come per esempio $\frac{5}{10}$; $\frac{12}{100}$; $\frac{122}{1000}$.

87. Tali frazioni si scrivono ordinariamente senza denominatore, ed in luogo di esso, suol mettersi avanti al numeratore un punto: come . 5; o una virgola: come , 5; oppure un zero avanti la virgola, allorchè peraltro non vi sono i numeri interi: come 0, 5: le quali espressioni equivalgono a $\frac{5}{10}$. Da altri si esprimono anche così, 125‴, che equivale a $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$.

88. Da quest'ultimo esempio si osserva, che la prima cifra dopo la virgola a man sinistra esprime le decine, la seconda le centinaja, la terza le migliaja, e così in appresso in ragion decupla verso man destra.

89. Siccome i zeri, che si mettono a destra dei numeri interi, li fanno crescere in ragion decupla; così pure mettendosi dei zeri a sinistra delle decimali dopo la virgola, decresceranno esse in ragion decupla, oppure cresceranno in ragion suddecupla, cioè diverranno dieci volte, o cento volte, o mille volte più piccole, secondo il numero dei zeri, che vi si porranno. Se dunque la frazione 0, 5 si voglia rendere dieci volte più piccola, in guisa che esprima centesimi; si scriverà così 0, 05, che equivale a 0, $\frac{05}{100}$.

90. Dalla stessa natura delle frazioni decimali si rileva, che mettendosi a destra delle medesime dei zeri, questi nulla significano. Onde 0, 5000 equivale a 0, 5; come appunto mettendo dei zeri a sinistra dei numeri interi, questi zeri non hanno significato alcuno. Onde 0005 equivale al 5 semplice. La ragione si è : perchè le decimali crescono, e decrescono in un modo oppostamente agl'interi: vale a dire, che come, per far crescere gl'interi, il zero deve porsi a destra ; così per far decrescere le decimali, il zero deve porsi a sinistra dopo la virgola, o dopo il punto, comunque si voglia (89).

91. Da una frazione decimale composta di più cifre possiamo toglierne alcuna a destra, senza che molto sminuiscasi il valore. della frazione. Per esempio dalla frazione 2, 4546 di una Tesa, se si tolga l'ultima cifra, e si scriva semplicemente 2, 454; il valore della frazione sarebbesi diminuito di sole $\frac{6}{10000}$ di una Tesa cioè di mezza linea incirca. Ma se noi tolghiamo le due ultime cifre, e scriviamo 2, 45; il valore della frazione verrebbe diminuito di $\frac{46}{10000}$ di una Tesa, che corrisponde a circa quattro linee: giacchè ogni Tesa è composta di 6 piedi, il piede di 12 pollici, il pollice di 12 linee, e la linea di 12 punti. Nel caso dunque, che nella frazione decimale si levino due cifre ; sarà bene di accrescere di una unità l'ultima cifra, che resta, per dar così un compenso alla frazione decimale diminuita di due note. Onde nel nostro caso in luogo di scrivere 2, 45, si scriverà 2, 46.

92. La grandezza delle quantità , e maggioranza delle frazioni decimali consiste nella prima figura a man sinistra, ancorchè molte sieno in un'altra frazione le fi-

gure a man destra. Onde, 7 è maggiore di , 60: come pure 0 , 8 è maggiore 0 , 7659.

93. Per notare ora l'origine delle decimali, si rifletta, che aggiungendosi dei zeri a tutti i resti della divisione dei numeri interi; si avranno i medesimi resti in decimali o esatte, o approssimanti. Quando le decimali non possono aversi esatte, si conosce dal ritorno della medesima nota, come accade nel 20 diviso per 12: o si conosce dal ritorno della stessa serie di note collo stesso ordine, come accade nel 16 diviso per 7. In questi casi, senza calcolo veruno, si possono aggiungere le note decimali, che si vogliono, e che ci bisognano, secondo la natura delle cose, e l' approssimazione all' intero sarà grande, comunque si voglia.

94. Se voglia ridursi una frazione ordinaria a decimale, si aggiunga un zero al numeratore, e si divida quindi pel denominatore. Per esempio per ridurre in decimale la frazione $\frac{1}{2}$, si aggiunga un zero al numeratore 1: ed allora avremo in decimali $\frac{1.0}{2}=0, 5$; ossia $\frac{5}{10}$. Di fatti la frazione decimale $\frac{5}{10}$ equivale ad $\frac{1}{2}$ dell'intero (127).

Della Somma.

95. La somma delle frazioni decimali si fa come negl'interi (14), avvertendo solamente, che le quantità da sommarsi devono disporsi in guisa, che le virgole, che marcano le decimali, restino in linea retta, e quindi tanto gl'interi, che le decimali si corrispondano fra loro, decine a decine, centinaja a centinaja ec.

Digitized by Google

ESEMPIO

```
35,7802
 1,053
 0,42687
15,86
──────────
53,12007
```

96. La ragione dell'operato nella somma delle decimali è del tutto evidente, mentre la disposizione delle quantità da noi osservata, avendo fatto corrispondere le decine alle decine, le centinaja alle centinaja ec.; ha fatto si, che nell'aggregato siasi raccolto adeguatamente il numero di esse quantità, secondo le loro decine, centinaja ec.

Della Sottrazione.

97. Nella sottrazione ancora si disporranno le diverse quantità da sottrarsi nello stesso modo, che si è prescritto per la somma: e quindi si farà la sottrazione nelle decimali, come si è fatto negl'interi (18).

ESEMPIO

```
14,00435
 9,17
──────────
 4,83435
```

98. La ragione dell'operato nella sottrazione si raccoglie da ciò, che abbiamo detto della somma delle decimali (96): giacchè dopo la disposizione accennata delle

due quantità, si vede apertamente, che abbiamo noi raccolto sotto la linea tutte le parziali differenze delle due date quantità.

Della Moltiplicazione.

99. La moltiplicazione delle quantità decimali si fa, come quella de'numeri interi, senza badare alle virgole, che notano le decimali. Peraltro, terminata l'operazione, devono separarsi colla virgola nella parte destra tante cifre, quante sono le decimali del moltiplicando, più quelle del moltiplicatore.

ESEMPIO

```
    3 4, 6 3 2
       1, 5 2 3 4
   ─────────────
     1 3 8 5 2 8
   1 0 3 8 9 6
   6 9 2 6 4
1 7 3 1 6 0
3 4 6 3 2
─────────────────
5 2 7, 7 5 8 3 8 8 8
```

100. La ragione dell'operato nella moltiplicazione delle decimali si capirà con questo facilissimo raziocinio. Porta la natura della moltiplicazione, che sia il prodotto al moltiplicando; come il moltiplicatore all'unità: come risulta dal numero 23, nel quale in forza di ciò, che in appresso diremo delle proporzioni (184) può farsi questa proporzione: cioè che sta il 30 al 6; come il 5 all'unità. Dunque se il moltiplicatore è una

decima, o una centesima dell'unità, il prodotto esprimerà una decima, o una centesima del moltiplicando: ed in conseguenza il medesimo prodotto dovrà esprimere una centesima, o una millesima dell'unità: vale a dire, che quando il moltiplicatore esprime una centesima dell'unità; allora il prodotto, che deve esprimere una centesima anch'esso del moltiplicando, esprimerà necessariamente una millesima dell'unità. Laonde le note decimali del prodotto devono essere nel primo caso due, e nel secondo tre: e generalmente parlando, il prodotto deve avere tante decimali, quante sono quelle del moltiplicando, più quelle del moltiplicatore.

Quindi è, che moltiplicando 1, 10 per 1, 10; avremo 1, 2100, col quale prodotto possiamo ordinare questa proporzione: vale a dire 1, 2100 sta a 1, 10; come 1, 10 sta all'unità: ossia $1 \frac{2100}{10000}$ sta ad $1 \frac{10}{100}$; come $1 \frac{10}{100}$ stanno ad 1; come vedremo nelle proporzioni.

Più facile ancora rimarrà l'esposta ragione, analizzando la cosa così. 3, 7 equivale a $3 \frac{7}{10}$, ossia $\frac{37}{10}$ (66). Similmente 4, 12 equivale a $4 \frac{12}{100}$, ossia a $\frac{412}{100}$. Ma Moltiplicandosi $\frac{412}{100}$ per $\frac{37}{10}$; si ha $\frac{15244}{1000}$, ossia $15 \frac{244}{1000}$, cioè 15, 244 decimali, come appunto sarebbe accadnto, se si fosse moltiplicato secondo la prescritta maniera 3, 7 per 4, 12 decimali. Dunque è chiaro, che punto non si sbaglia, allorchè si moltiplica secondo l'esposta maniera.

Della Divisione.

101. La divisione nelle quantità decimali si fa come negl'interi, senza badare alla virgola, che nota le decimali. Peraltro, terminata la divisione, si separeranno nel quoziente colla solita virgola tante note decimali a man destra, quante sono quelle del dividendo meno quelle del divisore.

ESEMPIO

```
                2, 4
3 6, 48 ————————
2 4          1 5, 2
———
1 2. 4
1 2 0
———
0 0 4. 8
    4 8
    ———
    0 0
```

102. Per comprendere la ragione dell'operato nella divisione delle decimali, convien ricordarsi, che secondo la definizione della divisione (31) il dividendo contiene tante volte il divisore, quante volte il quoziente contiene l'unità. Dunque in forza dei principj delle proporzioni, che si spiegheranno in appresso (184), diremo, che sta il quoto all'unità; come il dividendo al divisore. Dunque se il dividendo esprime decimi del divisore, anche il quoziente dovrà esprimere decimi dell' unità. Ma affinchè il dividendo possa esprimere decimi del divisore, conviene, che abbia una cifra di più di esso

divisore. Dunque anche il quoto, per esprimere decimi dell' unità in tal caso, deve avere una cifra decimale. Similmente allorchè il dividendo vuole esprimere centesimi del divisore, deve avere due cifre decimali più del divisore medesimo: e perciò anche il quoto, perchè possa in tal caso esprimere centesimi dell' unità, deve avere due cifre decimali. Sicchè, generalmente parlando, il quoto deve aver sempre tante cifre decimali, quante sono quelle del dividendo sopra quelle del divisore: ossia il quoto deve avere tante decimali, quante sono quelle del dividendo meno quelle del divisore, che è la stessa cosa.

Si capirà ancor meglio la forza di questa ragione, se colle date quantità si formi questa proporzione, cioè che stà il quoto all'unità; come il dividendo al divisore, ossia $15 \frac{2}{10}$ sta ad 1; come $36 \frac{48}{100}$ sta a $2 \frac{4}{10}$: ove si vede ocularmente, che come il dividendo, per esprimere decimi del divisore, ha dovuto assumere una decimale più del divisore medesimo; così il quoto ancora, per esprimere decimi dell'unità, ha dovuto assumere una sola nota decimale.

Finalmente per massimo schiarimento dell' esposta ragione, si analizzi la cosa così: 36, 48 corrisponde a $36 \frac{48}{100}$, ossia a $\frac{3648}{100}$ (66). Similmente 2, 4 corrisponde alla frazione $2 \frac{4}{10}$, ossia a $\frac{24}{10}$. Ma dividendo $\frac{3648}{100}$ per $\frac{24}{10}$, abbiamo $15 \frac{2}{10}$: come si erano avuti nell'esposta divisione delle decimali. Dunque il dividere col prescritto metodo è una operazione accurata.

103. Allorchè il dividendo ha meno note del divisore, devono aggiungersi al dividendo tanti zeri sulla

destra, quanti bastano, perchè il medesimo acquisti più note decimali di esso divisore: lo che non altera punto il valore delle decimali (90). Per esempio, se voglia dividersi 49, 1 per 20, 374; devono aggiungersi al dividendo tre zeri: ed avremo allora 49, 1000 diviso per 20, 374.

104. Le frazioni decimali, delle quali si è parlato finora, furono inventate da Regio Montano, il quale se ne servì nella costruzione delle Tavole dei Seni.

ARTICOLO IV.

Dei Numeri Complessi.

105. Numero *complesso* si dice quello, che è composto d'interi, e di fratti di più specie diverse. Le operazioni, che abbiamo finora descritte, potrebbero adattarsi anche ai numeri complessi. Ma siccome i numeri complessi possono trattarsi con meno imbarazzo, e più speditamente di quel che portano le dette operazioni; perciò descriveremo in questo Articolo le nuove maniere più spedite di trattare i numeri complessi.

106. Deve avvertirsi, che non può farsi operazione alcuna nei numeri complessi, se non si sappia prima la multiplice divisione delle quantità, che formano i numeri complessi: onde sappiasi quali rapporti le parti di questi numeri abbiano tanto fra loro, quanto relativamente all' unità principale. A tal' uopo rapporterò qui subito la divisione dei primarj numeri complessi più ordinarj.

107. Il Cerchio si divide in 360 parti uguali, che si dicono raggi: il raggio si divide in 60 minuti primi: ed ogni minuto primo, dividesi in 60 minuti secondi ec.

Il giorno contiene 24 ore: un ora contiene 60 mi-

nuti primi: un minuto primo contiene 60 minuti secondi: un minuto secondo 60 minuti terzi ec.

La Tesa contiene 6 piedi: un piede 12 pollici: un pollice 12 linee: una linea 12 punti.

La Lira contiene 20 soldi, ed il soldo 12 denari: talmentechè ogni lira è composta di 240 denari.

La Libbra contiene due marchi : un marco 8 oncie: un oncia 8 grossi: un grosso 3 denari: un denaro 24 grana, secondo l'uso francese.

Peraltro presso i Romani i pesi si valutano per decine, libbre, oncie, e grana. La decina è di dieci libbre: la libbra di 12 oncie: l'oncia di 24 grana.

In Napoli poi si valuta il peso per rotoli, e cantaja. Il cantajo contiene 100 rotoli: il rotolo circa 32 oncie: e 12 oncie formano una libbra.

Lo scudo romano contiene 10 paoli : il paolo 10 bajocchi: ed il bajocco cinque quattrini.

Il ducato di Napoli contiene 10 carlini : il carlino 10 grana: il grano 2 tornesi: un tornese sei cavalli: ed il cavallo è la diciottesima parte di una pubblica.

Della Somma.

108. Per eseguir la somma nei numeri complessi, devono prima disporsi le date quantità in guisa, che si corrispondano le une alle altre secondo le respettive loro denominazioni. Quindi cominciando da destra verso sinistra, si raccolgano le somme di ciascuna serie verticale: e se alcuna di queste somme superi il comun denominatore delle note sommate, se formi cioè qualche quantità della serie , che immediatamente la segue ; si trasporti in essa serie la quantità , e si scriva il solo residuo nella propria serie: come chiaramente si scorge in questo

Digitized by Google

ESEMPIO

Tese	Piedi	Pollici	Linee	Punti
9	3	11	2	7
100	0	0	0	0
47	5	3	8	0
11	0	10	8	4
168.	4.	1.	6.	11.

Della Sottrazione.

109. Nella sottrazione dei numeri complessi, dopo di aver disposte le quantità a norma di quanto si è detto della somma, altro non deve avvertirsi, sennonchè considerare, qual sia la quantità di ciascun numero rispetto al suo intero, o unità di cui è parte, nel caso, che si debba sottrarre un numero maggiore dal minore. Per esempio, se da 8 linee debbano sottrarsi 9 linee; allora l'unità, che prenderassi in prestito dalla nota seguente, valerà per 12 linee: attesochè 12 linee formano un pollice (107).

ESEMPIO

Tese,	Piedi,	Pollici,	Linee,	Punti.
100	0	0	0	0
17	4	5	11	8
82	1.	6.	0.	4

Digitized by Google

110. Due casi possono darsi nella moltiplicazione dei numeri complessi per rapporto ai fattori: atteso che non sempre ambedue i fattori sono composti di numeri complessi, ma lo sarà uno soltanto. Percorreremo noi questi due casi, assegnando in ognuno di essi tutte le maniere più comuni di fare la moltiplicazione: onde se ne abbia un'idea, e possa da ognuno sceglierseue quella che più gli accomoda.

111. Allorchè uno solo dei fattori è composto di numeri complessi; la moltiplicazione può farsi in tre modi. E primieramente la moltiplicazione può farsi così. 1.° Si riducano tutti i numeri del fattore complesso alla minima specie: 2.° si moltiplichino tutti insieme col fattore incomplesso: 3.° si riduca il prodotto alla specie maggiore per mezzo della divisione.

Per esempio, 14 canne di stoffo sono state pagate 25 lire, 13 soldi, e 6 denari la canna: cosa importano?

Per ridurre il fattore complesso a denari, dirò, che $25 \times 20 = 500 + 13 = 513 \times 12 = 6156 + 6 = 6162$ denari. Quindi moltiplico i 6162 denari per le 14 canne di stoffo, ed avrò 86268 denari. Finalmente per restituire questi denari alla massima specie, divido l'86268 per 12, ed ho 7189 soldi: dipoi divido il 7189 per 20, ed ho 359 lira, e 9 soldi, prezzo cercato.

112. Seconda maniera di moltiplicare un numero complesso per altro numero incomplesso. 1.° Si moltiplichino appartatamente i numeri di ciascuna specie. 2.° i prodotti delle specie minori si riducano alla specie maggiore: 3.° si sommino insieme tutti i prodotti.

Sia dato lo stesso problema di sapere cosa importino 14 canne di stoffo a 25 lire, 13 soldi, e 6 denari la canna? Noi lo risolveremo assai facilmente così.

Si moltiplichino le 25 lire per le 14 canne: le avremo	= 350
Si moltiplichino i 13 soldi per le 14 canne: avremo	9. 2
Si moltiplichino i 6 denari per le 14 canne: avremo	7
Sommano 359 lire, e 9 soldi: dico . .	359. 9

113. Terza maniera di moltiplicare un numero complesso per un'altro incomplesso. 1.° Si moltiplica la specie maggiore: 2.° per la specie minore si prendono le parti *aliquote* (che sono quelle (200), le quali prese alcune volte eguagliano il tutto): 3.° si sommino i diversi prodotti.

Non ci dipartiamo dallo stesso esempio, per essere sempre più chiari. Voglia sapersi cosa importino 14 canne di stoffo a 25 lire, 13 soldi, e 6 denari la canna ?

OPERAZIONE

l.	*s.*	*d.*
25.	13.	6.
c. 14.		
100.	0.	0.
25		
7.	0.	0.
1.	8.	0.
0.	14.	0.
0.	7.	0.
359.	9.	0

Sicchè io moltiplico il 25 per 14: quindi per moltiplicare le 14 canne per 13 soldi, prendo le parti aliquote, ragionando così. Siccome 10 soldi sono la metà d'una lira; perciò per 10 soldi prendo la metà del 14, che dà 7 lire. Noto di poi, che 2 soldi sono il decimo di una lira: e perciò io prendo per due soldi il decimo di 14, che è 1 lira, ed 8 soldi. Per l'altro soldo poi, che restavi al compimento dei 13 soldi, osservo, che deve essere la metà di ciò che ho preso per 2 soldi: e però di 1 lira, e di 8 soldi, che mi danno 14 soldi. Restano ora soltanto a moltiplicarsi i 6 denari per 14 canne, sul che io ragiono così: 6 denari sono la metà del soldo. Dunque il prodotto di 6 denari per 14 deve essere la metà dei 14 soldi, che si sono avuti per un soldo. Sicchè il prodotto del 6 per 14 sarà 7 soldi. Tiratane ora la somma, abbiamo 359 lire, e 9 soldi, come nelle passate operazioni.

N. B. Si avverta ora per sempre, che i segni posti in fronte alle diverse specie dei fattori complessi sono le caratteristiche, che usano gli Aritmetici per notare le medesime specie.

114. Si avverta ancora, che spesso un destro accorgimento può abbreviarci di molto la lunghezza delle operazioni. Per esempio, se venga richiesto, cosa diano 23 ducati, e 32 grana moltiplicati per 25 ducati: siccome il primo fattore corrisponde a 2332 grana; perciò moltiplico 2332 per 25, e nel prodotto 583 : 00 punto le due ultime cifre per le grana, ed avrò fatta l'operazione. La ragione, per cui si puntano le due ultime cifre per le grana, si è: perchè qualunque numero diviso per 100 darà sempre di resto due sole cifra in questi casi. Onde senza dividere il prodotto per 100, per avere i ducati, basta il puntare le due ultime cifre.

115. Allorchè tanto il moltiplicando, che il molti-

plicatore sono due numeri complessi; per fare la moltiplicazione con esattezza, e senza difficoltà, devono distinguersi due casi: 1.° quando i fattori esprimono amendue lo stesso genere di cose: 2.° quando esprimono due generi diversi di cose.

116. Nel primo caso può operarsi in due maniere. Nella prima maniera si opera così. 1.° si riducono alla minima specie ambedue i fattori: 2.° si moltiplicano fra di loro i due fattori così ridotti: 3.° per richiamare il prodotto alla specie maggiore, si divide non semplicemente per quel numero, con cui si sono ridotti i fattori alla minima specie, ma per questo numero moltiplicato in se stesso.

Per esempio, vuol sapersi, quanto importino 8 piedi, e 4 pollici moltiplicati per 6 piedi, e 6 pollici: vale a dire una camera, che abbia 8 piedi, e 4 pollici di lunghezza, e 6 piedi; e 6 pollici di larghezza, che aja ci presenterà essa camera?

Riducendo i piedi a pollici, avrò 100 pollici in luogo di 8 piedi, e 4 pollici. Quindi riducendo a pollici il secondo fattore ancora, avrò 78 pollici. Ciò fatto, moltiplico 100 per 78, che mi dà 7800 pollici.

Per ridurre poi questo prodotto a piedi, convien dividerlo non per 12 semplicemente, ma per 12 moltiplicato per 12, ossia per 144. E la ragione si è, perchè questo prodotto è nato precisamente dalla moltiplicazione di due fattori, ognuno dei quali era già stato moltiplicato per 12, affine di essere ridotti da piedi a pollici: è nato cioè da una doppia moltiplicazione di 12, ossia da 12 moltiplicato per 12. Volendo dunque ridurre questo prodotto 7800 pollici a piedi; dovrà dividersi per 12×12, cioè per 144: lo che ci darà 54 piedi, e 2 pollici.

117. Nella seconda maniera si opera così: 1.° Si

moltiplicano fra loro i due numeri della specie maggiore: 2.° per le specie minori si prendono le parti aliquote: 3.° si tira la somma di tutti i prodotti parziali.

Per esempio si domanda qual sia l'aja di una stanza, la quale abbia 8 piedi, e 4 pollici di lunghezza; e 6 piedi, e 6 pollici di larghezza?

OPERAZIONE

8.	4.
6.	6
48.	0
2.	0
4.	0
	2
54.	2

Sicchè io prima moltiplico gl'interi 8 per 6, che mi danno 48: quindi pel 4 dei pollici, siccome 4 pollici sono il terzo di un piede; perciò prendo il terzo dei 6 piedi, che è 2 piedi. Di poi per 6 pollici prendo la metà dell'8: atteso che 6 pollici sono mezzo piede. Finalmente per gli stessi 6 pollici moltiplicati per 4 pollici, prendo il terzo dei 6 pollici: atteso che 4 pollici sono il terzo di un piede. In tutto avrò 54 piedi, e 2 pollici, come si era avuto di sopra.

118. Passando ora al secondo caso, allorchè cioè i due fattori esprimono cose di diverso genere; avvertiremo, che quì ancora la moltiplicazione si può fare in due maniere, che sono le seguenti.

Prima maniera. 1.° Si riducano ambedue i fattori alla minima specie: 2.° si apponga alla minima specie

ottenuta di ambedue i fattori il suo respettivo denominatore, che richiami essa minima specie all'unità della specie maggiore dei fattori: 3.° si prosiegua quindi la moltiplicazione, come nelle frazioni semplici (78).

Per esempio 28 piedi, e 6 pollici di un dato lavoro a 4 lire, 12 soldi, e 6 denari il piede, quanto importeranno?

Io riduco i 28 piedi, e 6 pollici a pollici: ed avrò 342 pollici. Riduco poi le 4 lire, 12 soldi, e 6 denari a denari: ed avrò 1110 denari. Quindi siccome il pollice è la 12ª parte del piede, ed il denaro è anch'esso la 240ª parte della lira; perciò appongo questi due denominatori ai due prodotti avuti per richiamarli alla loro specie maggiore, ed ho $\frac{342}{12}$ di pollici, e $\frac{1110}{240}$ di denari. Ciò fatto, moltiplico queste due frazioni fra loro (78): ed avrò $\frac{379620}{2880}$, che corrispondono a 131 lire, 16 soldi, e 3 denari: prezzo, che si cercava.

119. Seconda maniera. Siccome l'esposta prima maniera di moltiplicare due fattori complessi di specie diversa è assai complicata, come ognun vede; qnindi è, che riuscirà più facile, e più spedita, facendone l'operazione per mezzo delle parti aliquote nel modo, che segue.

Sia dato lo stesso problema di sapere quanto importino 28 piedi, e 6 pollici di un dato lavoro a 4 lire, 12 soldi, e 6 denari il piede?

OPERAZIONE

l.	s.	d.
4	12.	6.
28.	6.	
112.	0.	0.
14.		
2.	16.	0.
0.	14.	
2.	6.	3
131.	16.	3

Sicchè dopo di aver moltiplicato 28 per 4, ed averne avuto 112: per i 10 soldi, che sono la metà di una lira, prendo la metà di 28, che è 14; ossia 14 lire. Per gli altri due soldi, compimento del 12, siccome due soldi sono la decima parte di una lira; prendo perciò il decimo di 28, che mi dà 2 lire, e 16 soldi. Pei 6 denari, che sono la metà di un soldo, prendo la metà di 28, che mi dà 14 soldi. Finalmente per i 6 pollici, che sono la metà di un piede, prendo la metà delle 4 lire, 12 soldi, e 6 denari, che vengono ad essere 2 lire, 6 soldi, e 3 denari. In tutto avrò 131 lire, 16 soldi, e 3 denari: come nella 1.^{a} maniera ancora.

120. Deve qui avvertirsi, che sebbene, generalmente parlando, sia in libertà nella moltiplicazione di porre qualsivoglia dei fattori per moltiplicando, lasciando servir l'altro per moltiplicatore; pure fa d'uopo, ed importa assai, che nella moltiplicazione dei numeri *concreti* si distingua attentamente il moltiplicando dal moltiplicatore. I due esempj, che sieguono, mostreranno l'importanza necessariissima di questa distinzione.

ESEMPIO 1.

Si domanda, quanto importino 17 tese di una data opera alla ragione di 34 lire, 10 soldi, e 2 denari la tesa?

OPERAZIONE

l.	*s.*	*d.*
34.	10.	2
t.		
17.		
238	0	0
34		
8	10	
0	17	
0	2	10
586	12	10

Dopo di aver moltiplicato 34 per 17, e dopo di aver preso per 10 soldi la metà del 17: siccome 2 denari sono la sesta parte di un soldo, ed in conseguenza la sessantesima parte dei 10 soldi trovati; quindi è, che per non imbarazzarmi con questa sessantesima parte dei 10 soldi trovati, fo un falso prodotto per comodo del calcolo. Prendo cioè per valore di un soldo il decimo dei 10 soldi trovati, ossia il decimo di 8 lire, e 10 soldi, che mi dà 17 soldi. Prendo quindi per valore dei 2 denari la sesta parte del 17, che sarà 2 soldi, e 10 denari. Quindi casso il falso prodotto, e raccogliendo la somma totale dei differenti prodotti; avrò

586 lire, 12 soldi, e 10 denari, che è il prezzo delle 17 tese, che si cercava.

ESEMPIO II.

Con 34 lire, 10 soldi, e 2 denari quanto lavoro si farà fare alla ragione di 17 tese per ogni lira? Vale a dire, che se per 1 lira si sono avute 17 tese di una data opera; con lire 34, soldi 10, e denari 2 quante tese si avranno della stessa opera?

Ognun vede, che il 17 deve prendersi tante volte, quante volte la lira è contenuta nelle 34 lire, 10 soldi, e 2 denari: deve cioè moltiplicarsi il 17 per 34 lire, 10 soldi, e 2 denari, affine di avere il lavoro, che cercasi.

OPERAZIONE

	t.			
	17			
	l.	*s.*	*d.*	
	34	10	2	
t.	*p.*	*p.*	*l.*	*p.*
68	0	0	0	0
51				
8	3			
0	5	1	2	$4\frac{4}{5}$
0	0	10	2	$4\frac{4}{5}$
t.	*p.*	*p.*	*l.*	*p.*
586	3	10	2	$4\frac{4}{5}$

Dopo di aver moltiplicato 17 per 34, e dopo di aver preso la metà delle 17 tese pei 10 soldi; formo un falso prodotto, prendendo il decimo delle 8 tese, e 3 piedi trovati per lo valore di un soldo: ed avrò 5 piedi, 1 pollice, 2 linee, 4 punti, e $\frac{8}{10}$ ossia $\frac{4}{5}$. Quindi prendo la sesta parte di questo valore per i 2 denari: ed avrò 10 pollici, 2 linee, 4 punti, e $\frac{24}{30}$ ossia $\frac{4}{5}$. Finalmente, cassato il falso prodotto, tiro la somma: ed avrò 586 tese, 3 piedi, 10 pollici, 2 linee, 4 punti, e $\frac{4}{5}$ di un punto.

Questo secondo esempio fa vedere l'importanza di distinguere attentamente nei numeri *concreti* il moltiplicatore dal moltiplicando, e di non porne indistintamente uno per l'altro. Poichè si è veduto, che sebbene i numeri siano gli stessi in ambedue gli esempj; nulla di meno non si ha lo stesso prodotto: perchè il quesito non è in ambedue il medesimo.

Della Divisione.

Nella divisione dei numeri complessi possono darsi tre casi. 1.° Quando è numero complesso il solo divisore: 2.° quando è numero complesso il solo dividendo: 3.° quando sono numeri complessi tanto il divisore, che il dividendo. Li esamineremo tutti tre colle loro distinzioni.

121. Se è numero complesso il solo divisore, deve questo ridursi alla minima specie in esso contenuta, ed allora o il nuovo divisore è minore del dividendo proposto, e faremo per esso la divisione, richiamando quindi il quoto alla specie maggiore, come nel 1.° esempio: o il nuovo divisore è un numero maggiore del dividen-

do proposto, e dovrà il dividendo moltiplicarsi per quegli stessi numeri, che hanno ridotto il divisore alla sua minima specie, prima di farne la divisione.

ESEMPIO I.

Una tessitrice ha fatto 762 canne di fittuccia in 5 giorni, e 7 ore. Vuol sapersi quante canne di fittuccia abbia fatto per ogni giorno?

Si riduca il divisore tutto a ore, col moltiplicare 5 per 24, e coll'aggiungere al prodotto 120 il 7, che darà così 127 per nuovo divisore. Quindi si divida il 762 per 127, ed il quoto 6 si moltiplichi per 24, per richiamarlo alla specie maggiore ricercata: ed avremo 144, che è il numero delle canne di fittuccia fatte in ciascun giorno.

PROSPETTO.

$$5 \times 24 = 120 + 7 = 127. \ d^e \ 762 : 127$$

$$= 6. \ d^e 6 \times 24 = 144$$

Il segno d^e è una cifra, che vuol dire *dunque*.

ESEMPIO II.

Un dato numero di giornalieri ha lavorato 28 tese di terra in 2 ore, e 20 minuti. Si domanda quante tese abbiano fatto per ogni ora?

Si riduca il divisore tutto a minuti, col moltiplicare 2 per 60, e coll'aggiungere il 20 al prodotto, che in tutto darà 140 minuti per nuovo divisore. Ora siccome le 28 tese di lavoro non possono dividersi per lo

Digitized by Google

nuovo divisore 140; perciò si moltiplichi anche il 28 per 60, ed il prodotto 1680 si divida per 140. Il quoto 12 ci darà il numero delle tese, che si sono lavorate in ogni ora: e si avverta, che in questo secondo caso non v'è bisogno di richiamare il quoto alla specie maggiore, come si è dovuto fare nel caso precedente: poichè vi si trova già richiamato, per aver moltiplicato tanto il divisore, che il dividendo per lo stesso numero 60, e per averli così ridotti ad una specie istessa. Questo avvertimento valerà per tutti i casi consimili.

PROSPETTO.

$$2 \times 60 = 120 + 20 = 140; \text{ e } 28 \times 60$$

$$= 1680 \,.\, d^{e}\, 1680 : 140 = 12$$

122. Se è numero complesso il solo dividendo, possono darsi due casi: cioè o che il dividendo, e il divisore hanno delle unità di diversa specie; o che il dividendo, e il divisore hanno delle unità della stessa specie.

Nel primo caso 1.° si divida la specie maggiore: 2.° se vi è residuo, si riduca alla specie prossimamente minore, e unendovi il numero di specie minore, a cui si è ridotto, e che sta nel dividendo; si prosiegua con esso la divisione: 3.° così si proseguirà sino al fine.

Per esempio, se vuol sapersi quanto ricada a persona, dividendosi 6843 lire, 13 soldi, e 8 denari in 4 persone; io divido subito 6843 per 4, che mi dà 1710 lire, e 3 di resto. Le 3 lire di resto, moltiplicandole per 20, e al prodotto 60 aggiungendo i 13 soldi del dividendo; le riduco a 73 soldi. Prosieguo ora la divisione, e dividendo il 73 per 4; ho 18 soldi, ed 1 di resto. Il resto 1 lo riduco a denari, moltiplicandolo per

Digitized by Google

12: ed aggiungendo al prodotto 12 li 8 denari del dividendo; ho 20 denari, i quali divisi per 4, danno 5 senza residuo alcuno. In tutto ricadono 1710 lire, 18 soldi, e 5 denari per ogni persona.

PROSPETTO.

$$6843 : 4 = 1710.\ 3\ .\ d^e\ 3 \times 20 = 60 + 13 = 73.$$

$$d^e\ 73 : 4 = 18.\ 1\ .\ d^e\ 1 \times 12 = 12 + 8 = 20\ .\ d^e\ 20 : 4 = 5.$$

Nel secondo caso, in cui il dividendo, e il divisore hanno delle unità della stessa specie, deve esaminarsi, se il quoto debba essere, o nò della medesima specie del dividendo, e del divisore: lo che raccoglierassi dallo stato della questione.

Allorchè il quoto ricercato dovrà essere della stessa specie del dividendo, e del divisore; la divisione si farà come nel caso precedente. Per esempio, se voglia sapersi quanto ricada per ogni lira, posto, che 4 lire abbiano lucrato 33 lire, 5 soldi, e 4 denari; io divido il 33 per 4, che mi dà 8 lire, ed 1 di resto. La lira di resto riducesi a 20 soldi, ai quali aggiunti i 5 soldi del dividendo, fanno 25 soldi: che divisi per 4, danno 6 soldi, ed 1 di resto. Questo resto di 1 soldo riducesi a 12 denari, ai quali aggiunti i 4 denari del dividendo, fanno 16 denari: che divisi per 4, danno 4 senza resto alcuno. In tutto ricadono 8 lire, 6 soldi, e 4 denari per ognuna delle 4 lire del divisore: ed è questo il quoto cercato, la cui specie trovasi esser quella stessa, che hanno il divisore, ed il dividendo.

$33:4=8.1.d^e\ 1\times 20=20+5=25.d^e\ 25:4$

$=6.1.d^e\ 1\times 12=12+4=16.\ d^e\ 16:4=4.$

Ma quando essendo il dividendo un numero complesso, e della stessa specie del divisore, il quoto non ostante deve venire di una specie differente; allora ci regoleremo così. 1.° Si riducano tanto il dividendo, che il divisore alla minima specie, in essi contenuta: 2.° la divisione si faccia come nel caso precedente: 3.° se vi sarà qualche resto, si trattino le unità di esso resto, ed in conseguenza di tutto il dividendo, come se fossero esse di quella stessa specie, di cui deve venire il quoto, che cercasi.

Per esempio con 46 lire, 11 soldi, e 6 denari quante tese di opera si faranno fare alla ragione di 3 lire per ogni tesa?

Si osserva in questo esempio, che tanto il dividendo, che il divisore sono composti di lire, soldi, e denari, che sono unità della stessa specie. Il quoto peraltro, che si cerca, deve esser composto di tese, che sono unità differenti.

Per rinvenir questo quoto, noi riduciamo le 46 lire, 11 soldi, e 6 denari del dividendo a denari: ed avremo 11178 denari. Riduciamo poi il divisore 3 lire parimente in denari, che saranno 720 denari. Quindi divideremo l' 11178 per 720, che darà 15 tese, e 378 di resto. Considerando il 378 come resto di tante tese; col moltiplicarlo per 6, lo ridurremo a 2268 piedi: e questi divisi per 720, daranno 3 piedi, e 108 di resto. Moltiplicando questo resto per 12; lo ridurremo a 1296

pollici, i quali divisi per 720, danno 1 pollice, e $\frac{8}{10}$ di resto.

In tutto ricadono 15 tese, 3 piedi, 1 pollice, ed $\frac{8}{10}$ di un pollice alla enunciata ragione di 3 lire a tesa. Di fatti, dando ad ogni tesa il valore di tre lire; ricadono 10 soldi per piede, ed in conseguenza 10 denari per pollice, e gli $\frac{8}{10}$ di un pollice saranno 8 denari: cosicchè fattane la somma, abbiamo le 46 lire, 11 soldi, e 6 denari del dividendo.

PROSPETTO

$$\frac{11178}{720} = 15.\ 378.\ d^e\ 378 \times 6 = 2268.\ d^e\ \frac{2268}{720} =$$

$$3.\ 108.\ d^e\ 108 \times 12 = 1296.\ d^e\ \frac{1296}{721} = 1\ \frac{8}{10}$$

123. Se finalmente siano numeri complessi tanto il dividendo, che il divisore, convien badare, se esprimano ambedue uno stesso genere di cose, o se esprimano generi diversi di cose: vale a dire se tanto il divisore, che il dividendo siano composti di unità della stessa specie, o pure di unità di specie diversa.

Nel 1.° caso si riducano il dividendo, e il divisore alla minima loro specie, e se ne faccia la divisione nel modo consueto. Che se nella divisione abbiamo qualche residuo, questo si moltiplicherà per la specie prossimamente minore di ciò, che cercasi nel quoto; e si continuerà quindi la divisione collo stesso divisore di prima.

Per esempio con 184 lire, 13 soldi, e 9 denari quante canne di panno si compreranno alla ragione di 14 lire, 15 soldi, e 6 denari la canna? Quì tanto il dividendo, che il divisore contengono unità della stessa specie: il quoto poi sarà di specie diversa. Onde ci regoleremo così.

Si riducano le 184 lire, 13 soldi, e 9 denari del dividendo a denari, ed avremo 44325 denari. Di poi si riducano del pari le 14 lire, 15 soldi, e 6 denari del divisore a denari: ed avremo 3546 denari. Il 44325 diviso per 3546 darà 12 canne, e 1773 di resto. Ora la specie più prossima alle canne sono i palmi. Onde moltiplico il resto 1773 per 8 palmi: ed avrò 14184, che diviso per 3546 darà 4 palmi senza resto alcuno. Sicchè coll'enunciata somma si compreranno 12 canne, e 4 palmi di panno.

PROSPETTO

$$\frac{44325}{3546} = 12.\ 1773.\ d^{e}\ 1773 \times 8 = 14184.\ d^{e}\ \frac{14184}{3546} = 4.$$

Nel 2.° caso, quando il divisore, e il dividendo esprimono cose di diverso genere; allora la divisione, si fa così. 1.° Si riducano il divisore, e il dividendo alla minima specie: 2.° si dividano quindi fra di loro: 3.° siccome il quoto, che ne nasce, é composto delle parti minime contenute nel dividendo; perciò si riduca il quoto alla specie maggiore coi soliti mezzi: come si vedrà qui appresso.

Per esempio un'Artista per un lavoro fatto in 12 giorni, e 6 ore ha ricevuto 104 lire, 2 soldi, e 6 denari. Quanto ha guadagnato per ogni giorno?

Le 104 lire, 2 soldi, e 6 denari danno 24990 de-

nari. I dodici giorni, e 6 ore ridotti ad ore danno 294 ore. Sicchè divido il 24990 per 294, ed ho 85 denari pel guadagno in ciascuna ora dell' artista. Finalmente l'85 moltiplicato per le 24 ore dà 2040 denari, i quali divisi per 12, danno 170 soldi: e questi divisi per 20, danno 8 lire, e 10 soldi pel guadagno giornaliero dell' artista.

PROSPETTO

$$\frac{24990}{294} = 85^{d.} \ .\ d^{e}\ 85 \times 24^{ore} = 2040.^{d.} \quad d^{e}\ \frac{2040}{12}$$
$$= 170^{s.} \ .\ d^{e}\ \frac{170}{20} = 8^{s.}\ 10^{d.}$$

124. La maniera di così dividere due numeri complessi è certamente accurata. Peraltro, se mai la distinzione da noi fatta recasse qualche imbarazzo; la divisione accennata potrà farsi in quest' altro modo, che abbraccia tutt'i casi, che possono darsi nel dividere due numeri complessi.

La divisione si fa così. 1.° Si riduca il divisore alla minima specie in esso contenuta: 2.° si moltiplichi il dividendo per quel numero, che esprime quanti della specie minore del divisore compongono la specie maggiore del medesimo: 3.° si faccia quindi la divisione, e se vi sarà qualche resto, si riduca sempre alla specie prossimamente minore del dividendo, e si divida sempre per lo stesso divisore, senza variarlo giammai.

Ognun vede, che in questo modo la divisione, di cui parlasi, è ridotta allo stesso caso di dividere un dividendo complesso per un divisore incomplesso. Per esempio 5 tese, 4 piedi, e 4 pollici di un certo lavoro sono stati pagati 8 lire, 3 soldi, ed 1 denaro. Si domanda, a quanto ricada per ciascuna tesa?

Digitized by Google

Ognun vede, che deve dividersi il numero delle lire, soldi, e denari per le tese, piedi, e pollici. Sicchè io riduco le 5 tese, 4 piedi, e 4 pollici a pollici: ed avrò 412 pollici. Di poi siccome per fare una tesa vi vogliono 72 pollici; perciò moltiplico le 8 lire, 3 soldi, ed 1 denaro per 72: ed avrò 578 lire, e 2 soldi per nuovo dividendo.

Dopo questa preparazione, divido il 578 per 412, che mi dà 1 lira, e 166 di resto. Riduco questo resto in soldi, ed ho 3320 soldi, ai quali aggiunti gli altri due soldi del dividendo preparato; avrò 3322 soldi. Divido questi 3322 soldi per 412, ed ho 8 soldi, e 126 di resto. Riduco questo resto a denari, ed ho 1492 denari, i quali divisi per 412 danno 6 denari senza resto alcuno. Onde concludo, che ricade 1 lira, 8 soldi, e 6 denari per ciascuna tesa.

PROSPETTO

$$\frac{578.2}{412} = 1.\ 166.\ d^e\ 166 \times 20 = 3320 + 2 = 3322.$$

$$d^e\ \frac{3322}{412} = 8.\ 126.\ d^e\ 126. \times 12 = \frac{1492}{412} = 6$$

Per comprendere la ragione dell'operato in questa divisione, deve riflettersi, che le 5 tese, 4 piedi, e 4 pollici corrispondono a 412 pollici: e che il pollice è la 72^a parte della tesa. Onde il divisore sarà $\frac{412}{72}$. Ma per dividere una frazione per un'altra deve voltarsi sotto sopra il divisore (83), e moltiplicare quindi per la frazione così rivoltata. Dunque nel nostro caso deve moltiplicarsi il dividendo 8 lire, 3 soldi, ed 1 denaro

per $\frac{72}{412}$: lo che riducesi a moltiplicare immediatamente per 72, e a dividere poscia per 412 a norma di ciò, che si è prescritto.

Fa d' uopo peraltro avvertire, che siccome questa maniera di dividere due numeri complessi riducesi a dividere un numero complesso per un numero incomplesso; quindi è, che deve in essa badarsi alla natura delle unità del quoto, che cercasi, se siano esse della stessa specie delle unità del dividendo, e del divisore, o nò: ed osservarsi in questa ultima divisione ancora ciò, che è stato prescritto nel numero 122.

ARTICOLO V.

Del valore delle Frazioni.

125. Valutare una frazione è lo stesso, che trovare il suo giusto, e respettivo valore. Questo valore poi o si cerca nelle frazioni semplici, o nelle decimali, o nelle frazioni di frazioni. Daremo qui la maniera di valutare ognuna di queste tre differenti specie di frazioni.

126. Le frazioni semplici si valutano così. Si cerca per esempio il valore di $\frac{5}{7}$ di una libbra. Siccome ogni libbra contiene 12 oncie, perciò si moltiplica 12 per 5, ed il prodotto 60 si divide per 7: ed avremo 8 oncie, e $\frac{4}{7}$. Quindi siccome ogni oncia contiene 24 denari; perciò si moltiplica 24 per 4, ed il prodotto 96 si divide per 7: ed avremo 13 denari, e $\frac{5}{7}$. Finalmente siccome ogni denaro contiene 24 grana; perciò si

moltiplica 24 per 5, ed il prodotto 120 si divide per 7: ed avremo 17 grana, ed $\frac{1}{7}$ di un grano. Sicchè $\frac{5}{7}$ di una libbra corrispondono a 8 oncie, 13 denari, 17 grana, ed $\frac{1}{7}$.

Lo stesso deve dirsi, e deve farsi con qualunque altra frazione di simile specie, riflettendo essere regola generale, per valutare simili frazioni, di moltiplicare il numeratore della data frazione pel numero intero, a cui si rapporta, e di dividerne il prodotto sempre pel denominatore della data frazione.

La ragione dell'operato è questa. Per valutare un rotto, deve ridursi a parti di quella specie o denominazione, che può avere realmente l'intero, di cui esso rotto è parte: conviene cioè, che il rotto si riduca ad un'altra frazione, il cui denominatore siano le parti, nelle quali può dividersi realmente l'intero. Ma per ridurre una frazione ad un dato denominatore, deve operarsi nel modo da noi prescritto in questa maniera di valutare le frazioni (59). Dunque questa operazione è veramente in regola, e come si deve.

L'analisi dimostrerà ancor meglio la cosa. La frazione $\frac{13}{20}$ di un'ora corrisponde a $\frac{39}{60}$ di ora; cioè a 39 minuti (47). Ma valutando la frazione $\frac{13}{20}$ nel modo prescritto; abbiamo lo stesso risultato: poichè 13 moltiplicato per 60 equivale a 780, e questo diviso per 20 dà 39, che sono 39 minuti. Dunque l'operazione da noi eseguita corrisponde perfettamente all'analisi, che può farsene.

127. Le frazioni decimali, siccome non hanno il denominatore, perciò sono più facili a valutarsi. Se si

Digitized by Google

domandi, per esempio, cosa valgano 0, 532 di una tesa: siccome la tesa è di 6 piedi; perciò moltiplico il 0, 532 per 6, lo che darà 3, 192 di piedi: vale a dire 3 piedi, e 0, 192 di un piede. Di poi siccome il piede contiene 12 pollici; perciò moltiplico il 0, 192 per 12: ed avrò 2, 304 di pollici, cioè 2 pollici, e 0, 304 di un pollice. Finalmente, moltiplicando questa ultima frazione per 12, per ridurla a linee; avrò 3, 648 di linee, ossia 3 linee, e 0, 648 di una linea. Sicchè il valore di 0, 532 di una tesa corrisponde a 3 piedi, 2 pollici, 3 linee, e 0, 648 di una linea.

128. Passando ora a parlare della maniera di valutare le frazioni di frazioni; fa duopo riflettere, che tali frazioni possono avere unito talvolta anche un numero intero. Onde convien sapere cosa debba farsi in tali casi, de'quali parleremo con distinzione.

Ma prima di tutto si sappia, che dicesi frazione di frazione, quella, che vien separata dall'antecedente, ossia da quella, che la precede verso destra per la preposizione *di*. Per esempio $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, o pure $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{6}$ diconsi frazioni di frazioni: poichè $\frac{2}{3}$ nel primo esempio è frazione di $\frac{3}{4}$, e nel secondo esempio è frazione di $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{6}$.

Premesso ciò, per valutare una frazione di frazione, 1.° devono ridursi ad una sola frazione, lo che si ottiene moltiplicando tutti i numeratori fra loro, e tutti i denominatori fra loro; e ponendo il primo prodotto per numeratore, ed il secondo per denominatore della nuova frazione: onde $\frac{2}{9}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{2}{4}$ di ora si ridu-

cono a $\frac{12}{180}$, ossia ad $\frac{1}{15}$ di ora: 2.° dopo che le frazioni di frazioni si saranno ridotte ad una sola, la maniera di valutarle sarà quella stessa, che è stata prescritta per le frazioni semplici (126).

La ragione per cui le frazioni di frazioni si riducono ad una sola nel modo accennato è facile a capirsi. Poichè prendere, per esempio, $\frac{2}{9}$ di $\frac{3}{5}$ di ora, altro non vuol dire, sennonchè moltiplicare $\frac{3}{5}$ per $\frac{2}{9}$: questo, e non altro essendo il significato di quel *prendere $\frac{2}{9}$ di volta la frazione $\frac{3}{5}$ di ora.*

Similmente prendere $\frac{2}{9}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{2}{4}$ di ora riducesi a questo, di prender cioè $\frac{6}{45}$ di $\frac{2}{4}$ di ora: poichè $\frac{2}{9}$ di $\frac{3}{5}$ riduconsi a $\frac{6}{45}$ secondo l'antecedente paragrafo, e la ragione qui esposta, per la quale si vede ancora, che $\frac{6}{45}$ di $\frac{2}{4}$ di ora riduconsi a $\frac{12}{180}$ ossia a $\frac{1}{15}$ di ora.

La forza di questa ragione si vedrà più ocularmente ancora con quest'analisi. Cioè $\frac{2}{4}$ di ora corrispondono a 30 minuti. Dunque $\frac{3}{5}$ di $\frac{2}{4}$ corrispondono a 18 minuti. Dunque $\frac{2}{9}$ di questi tre quinti corrispondono a 4 minuti. Dunque $\frac{2}{9}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{2}{4}$ di ora si troveranno corrispondenti a 4 minuti. Dunque l'operazione è coerente all'analisi, e però accurata del tutto.

Quando le frazioni di frazioni hanno unito qualche numero intero, come per esempio $\frac{3}{4}$ di 5, $\frac{3}{8}$, allora si deve prima ridurre il 5 ad ottavi, e poi operare come si è detto poc'anzi. Onde l'enunciata frazione si ridurrà prima a $\frac{3}{4}$ di $\frac{43}{8}$ (66); quindi si ridurrà ad un solo rotto, che sarà $\frac{129}{32}$ ossia 4 $\frac{1}{32}$; e finalmente si valuterà secondo ciò, che è stato detto poc'anzi delle frazioni di frazioni.

Talvolta una riflessione puole risparmiare la lunghezza delle operazioni nel valutare le frazioni. Per esempio, se si domandino $\frac{5}{7}$ di 24 lire, si potrebbero prendere $\frac{5}{7}$ di una lira, e moltiplicare quindi per 24 ciò, che avrà dato questa operazione. Peraltro sarà assai meglio di moltiplicare subito $\frac{5}{7}$ per 24 lire, lo che dà $\frac{120}{7}$ di lire, e valutare quindi questa nuova frazione di $\frac{120}{7}$, che darà 17 lire, 2 soldi, 10 denari, e $\frac{2}{7}$ di un denaro.

Passiamo ora all'Algebra, alla quale si sono da noi riservate tutte le altre rimanenti operazioni dell'Aritmetica per maggior precisione, e chiarezza di chi studia.

CAPO SECONDO

DELL'ALGEBRA.

129. Trattandosi di calcolare le quantità, nelle quali le unità non sono determinate, ci serviamo delle lettere dell'alfabeto, per indicarle: e ciò facendo, possiamo estendere il calcolo a qualsivoglia specie di quantità. Onde con ragione questa maniera di calcolare, che volgarmente dicesi *Algebra*, vien chiamata da Newton *Aritmetica Universale*: e puol definirsi. *La Scienza delle grandezze in genere.*

Considerando Wolfio le scoperte maravigliose, che per mezzo dell'Aritmetica comune si sarebbero tentate invano, chiamò questa scienza *apice degli umani ingegni.*

130. Prima di venire alle quattro operazioni dell' Algebra, convien premettere il significato di alcuni segni, e la spiegazione di alcuni termini, dei quali faremo uso nelle medesime operazioni.

Già si sono spiegati sparsamente nell' Aritmetica molti segni, dei quali parliamo. Non sarà peraltro inutil cosa di qui ripeterli. Il segno di eguaglianza è questo $=$: il segno della somma è $+$, che si dice anche il segno del *più*: il segno della sottrazione è $-$, e si dice anche segno del *meno*: della moltiplicazione è $\times$, oppure quando due lettere sono insieme unite senza verun segno interposto, come ab: della divisione è — con al disotto il divisore, e al disopra il dividendo, come $\frac{a}{b}$: oppure ponendo nel medesimo rigo prima il dividendo, quindi due punti, e dopo i due punti il divisore, come $b : a$. Di alcuni altri segni parleremo più opportunamente altrove. Aggiungiamo quì soltanto, anche per la lettura di Wolfio, e di altri Matematici, che di que-

sti due segni $><$, il primo $>$, che ha l'apertnra a man sinistra di chi legge, significa maggioranza, e il secondo $<$, che ha l'apertura a mano destra, significa minorità. Onde $A > B$ vuol dire, essere A maggiore di B, ed $N < M$ indica, che N è minore di M.

Coefficiente si dice un numero anteposto alle lettere, che significa prendersi la quantità della lettera posta dopo tante volte, quante volte l' unità si contiene nello stesso dato numero: come sarebbe $2a$.

Esponente si dice un numero posto in fronte ad una lettera, e significa quante volte si sarebbe dovuta scrivere senza alcun segno interposto: così in luogo di scrivere $a\,a\,a$, si scrive a^3, ed il 3 è l'esponente.

131. Le quantità letterali hanno sempre i loro segni alla sinistra; sebbene il segno $+$ alla sinistra della prima lettera vi s'intenda, anche non posto.

132. *Quantità simili* chiamansi quelle, che hanno le medesime lettere, ed i medesimi esponenti; benchè i coefficienti, ed i segni siano diversi. *Quantità* poi *dissimili* sono quelle, che hanno lettere, ed esponenti diversi; benchè i segni, ed i coefficienti siano gli stessi. Onde $-9a^2$, e $+3a^2$ sono quantità simili. Al contrario $-2b^3$, e $-2b^4$ sono dissimili.

133. Una quantità posta da sè stessa, senza che sia unita ad un'altra quantità per mezzo di qualche segno di somma, o sottrazione, si chiama *monomio*. Onde se le quantità unite coi coefficienti sian due, avremo un *binomio*: e se sian tre, un *trinòmio:* e così in infinito.

Se poi siano più quantità unite come sopra indeterminatamente, avremo il *polinomio*: come vedremo più chiaramente in appresso.

Digitized by Google

ARTICOLO I.

Della riduzione delle quantità algebriche.

134. La riduzione delle quantità algebriche consiste in esporle colla maggior semplicità. Eccone le regole. 1.° I termini, e le lettere di ciascun termine devono ritenere sempre l'ordine alfabetico. 2.° I termini simili, se avranno gli stessi segni, si ridurranno ad un sol termine preceduto da uno stesso segno, e da un coefficiente uguale alla somma dei detti termini: se poi i segni saranno diversi, noi sottrarremo il coefficiente minore dal maggiore, e ne scriveremo la differenza col segno del coefficiente maggiore. 3.° Se i coefficienti siano eguali, e i segni diversi nei termini simili, si cancelleranno affatto i medesimi termini. Tutte queste regole si vedranno messe in pratica nella riduzione, che segue.

ESEMPIO

$$2b^2d + b^2d - 4dc + 2dc + 6a^2b - 4ad + 3d^2.$$

Riducesi come segue

$$3b^2d - 2dc + 6a^2b - 4ad + 3d^2$$

Della Somma.

135. Per eseguire la somma, si pongano le quantità simili una sotto dell' altra. Quindi, se avranno i medesimi segni, si sommeranno i loro coefficienti, come nell' Aritmetica comune. Se poi i segni nelle quantità simili siano diversi, vale a dire in alcune vi sia il segno $+$, ed in altre il segno $-$; allora le quantità si-

mili, se saranno anche eguali, si distruggeranno affatto, e se siano ineguali, rimarranno le differenze nelle quantità maggiori con il proprio segno. Se poi le quantità siano dissimili, si scriveranno una dopo l'altra coi loro respettivi segni. In una parola la somma nulla differisce dalla riduzione, e perciò si opera nello stesso modo.

ESEMPIO

$$6b - ab + dm^3 - 8dc^2 - 3a + mn^3 + dn^2$$

$$5b + ab - 3dm^3 + 5dc^2 + a + 3mn - dn^2$$

$$11b - 2dm^3 - 3dc^2 - 2a + mn^3 + 3mn$$

Della Sottrazione.

136. La sottrazione si fa, mutando nelle quantità da sottrarsi tutti i segni, cioè il + in —; e il — in +. Dopo di ciò si opererà nella stessa maniera, che si è prescritta per la somma.

ESEMPIO

Da questa quantità

$$ab + ab^2 - d^2 + a^2b + 4dc - 3bd^2$$

Debba sottrarsi

$$ab - bc + d^2 - a^2b - 3dc + bd^2 + b.$$

Colla mutazione dei segni la ridurremo così:

$$ab + ab^2 - d^2 + a^2b + 4dc - 3bd^2$$

$$-ab + bc - d^2 + a^2b + 3dc - bd^2 - b$$

$$ab^2 + bc - 2d^2 + 2a^2b + 7dc - 4bd^2 - b.$$

La ragione di operare, come abbiamo fatto nella somma, e nella sottrazione algebrica, è chiarissima da quanto abbiamo detto nell' Aritmetica, e da quanto si è da noi spiegato nelle passate Teorie.

Il motivo poi, per cui nella sottrazione il segno $+$ si cangia in $-$, e quello del $-$ in $+$, eccolo. Quando si sottrae da d la quantità $a - b$, se si togliesse dal d tutta l'a, senza la detrazione del b; si toglierebbe più del dovere, per quanto è grande la quantità b: e ciò non può compensarsi, sennonchè mettendo al b il segno positivo $+$.

Nei numeri apparisce ciò ocularmente. Da 6 debba sottrarsi $5 - 3$. Secondo l'esposta regola deve scriversi $6 - 5 + 3$: lo che riducesi a 4. Ma se si fosse posto $6 - 5 - 3$, avremmo avuto $6 - 8$, il che non deve essere: poichè il $5 - 3 = 2$, ed il solo 2 deve sottrarsi dal 6.

Della Moltiplicazione.

137. Dovendosi fare la moltiplicazione nelle quantità letterali; si pongano i due fattori uno sotto l'altro: e quindi tirata sotto al moltiplicatore una linea, come nell'Aritmetica comune, si osservi quali siano i segni, i coefficienti, le lettere, e gli esponenti.

Consideriamo ora la cosa in un monomio. Se i segni siano gli stessi in ambedue i fattori, cioè se si trovi o in ambedue il $+$, o in ambedue il $-$; il segno del prodotto sarà sempre $+$. Ma se in un fattore vi è il segno $+$, e nell'altro il segno $-$; allora il segno del prodotto sarà sempre $-$. I coefficienti si moltiplicano fra di loro, come nell'Aritmetica comune. Le lettere si pongono l'una dopo l'altra, senza verun segno interposto. Gli esponenti poi nelle quantità rappresentate dalla medesima lettera in ambedue i fattori si sommano fra loro.

Se le quantità dei fattori siano polinomie; si prenda un monomio nel moltiplicatore, e si moltiplichi per tutti i monomj del moltiplicando: e lo stesso si faccia del secondo, e del terzo monomio del moltiplicatore, fintanto che ve ne sono, ed essendovi quindi delle quantità simili, si faccia la somma di tutto il prodotto.

ESEMPIO

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

$$a^2 - 2ab$$

$$a^5 - 3a^4b + 3a^3b^2 - 2a^4b + 6a^3b^2 - 6a^2b^3$$

Lo scriversi le lettere senza segno interposto, è una ipotesi di sopra indicata (129): e da questa ipotesi dipende la somma, che si fa degli esponenti della medesima lettera nel prodotto della moltiplicazione.

La moltiplicazione dei coefficienti non ha veruna difficoltà: come senza difficoltà s'intende, che trovando-

si in ambedue i fattori il segno $+$; il segno del prodotto debba essere $+$ anch'esso.

Neppure difficile sarà il capire, che se i segni di ambedue i fattori siano dissimili, il segno del prodotto debba essere il $-$. Poichè quando moltiplicasi 8 per $5-3$, per esempio, si pone dapprima $8 \times 5 = 40$. Il prodotto 40 è maggiore di ciò, che deve essere: poichè $5-3$ vale quanto 2 soltanto. Sicchè il prodotto 40 intanto è maggiore di quel, che deve essere: perchè il numero 3, che doveva sottrarsi dal 5, vi è contenuto otto volte indebitamente. Dunque per ricondurre il prodotto al suo giusto valore, deve il 3 sottrarsi dal 40 otto volte: deve cioè sottrarsi dal 40 il 24, ed allora il residuo 16 sarà il giusto prodotto cercato. Laonde il prodotto di 8 per $5-3$ deve esprimersi così $40-24$: e non altrimenti.

Similmente nella moltiplicazione, per esempio, di $+3$ per -2 il moltiplicatore -2 col suo segno negativo fa conoscere, che la grandezza $+3$ bisogna prenderla due volte negativamente: fa vedere cioè, che la grandezza $+3$ deve sottrarsi 2 volte. Ma per sottrarre il positivo, dobbiamo cambiarlo in negativo, mutando il $+$ in $-$: come si è detto nella sottrazione (136). Dunque si scriverà nel nostro caso $+3 \times -2 = -6$. Dunque nella moltiplicazione $+ \times - = -$.

Rimane un poco difficile ai principianti il capire, come, essendo in ambedue i fattori il segno $-$; debba nel prodotto apporsi il segno $+$. Ma svanirà tutta la difficoltà, se si badi al significato della parola *moltiplicazione* in questa circostanza. Esso è appunto questo: *sottrazione di una quantità negativa da farsi tante volte, quante volte trovasi l'unità nel moltiplicatore*. Ora la sottrazione di quantità negativa equivale all'apposizione di quantità positiva, in vigore della mutazione dei

segni da farsi: come nella sottrazione si è detto (136). Dunque nel caso, di cui parliamo, il segno del prodotto deve essere positivo, cioè $+$.

Ecco il tutto espresso in numeri: $-3 \times -2 = +6$. Poichè il segno del moltiplicatore 2 essendo negativo; indica, che bisogna sottrarre il 3 due volte. Dunque al termine -3 da sottrarsi convien mutare il segno, in vigore della proprietà accennata (136) della sottrazione. Dunque deve scriversi $+3 \times +2 = +6$. Dunque $- \times - = +$.

Alle volte vogliamo notare la moltiplicazione di due polinomj, senza eseguirla. Ciò si fa, tirando sopra le quantità polinomie una linea col segno di moltiplicazione fra loro, come sarebbe $\overline{a + b + c} \times \overline{m + n}$: oppure, come ad altri più piace, $(a + b + c)\ (m + n)$.

Della Divisione.

138. Nella moltiplicazione si comprende il moltiplicando nel prodotto tante volte, quante volte l'unità trovasi nel moltiplicatore: e nella divisione si suppone, che il dividendo sia appunto un prodotto del divisore moltiplicato pel quoto. Quindi è, che le unità contenute nel quoto rappresentano in quante quantità eguali al divisore possa risolversi il dividendo. Sicchè queste due operazioni sono in maniera connesse fra di loro, che una discioglie, come l'altra compone. Da questa riflessione nascono le seguenti regole per la divisione algebrica. Cominciamo ad eseguire queste regole, supponendo, che sia monomio tanto il divisore, che il dividendo.

Se nelle quantità letterali, delle quali una sia dividendo, e l'altra divisore, trovisi la lettera comune col medesimo esponente; si cancellerà detta lettera.

Se la detta lettera sarà unica tanto nel dividendo,

Digitized by Google

che nel divisore; il quoto sarà $= 1$. Per esempio in queste quantità $ab : a = b$; così $ab : ab = 1$; oppure $a : a = 1$.

Se vi siano coefficienti; il coefficiente del dividendo si divide per quello del divisore, come nell'Aritmetica comune. Onde $6ab : 3a = 2b$.

Quanto agli esponenti, che si trovano nella medesima lettera, si sottragga l' esponente del divisore da quello del dividendo. Onde $a^6 : a^2 = a^4$.

Rispetto poi ai segni, se questi siano gli stessi tanto nel dividendo, che nel divisore; si porrà nel quoto il segno positivo $+$: se poi siano diversi, il quoto avrà il segno negativo $-$.

Se il divisore, o il dividendo, o ambedue siano quantità composte; oltre le regole accennate, converrà 1.° prendere un monomio del divisore, e paragonarlo con un monomio del dividendo, usando le prescritte regole: 2.° moltiplicare quindi il quoto per tutto il divisore: 3.° fare la sottrazione, e notare il residuo del dividendo, e di un tal prodotto: 4.° aggiungere a questo residuo l'altra quantità del dividendo, e continuare nello stesso modo l'operazione.

Si avverta, che sebbene, quando il divisore è composto, sia in arbitrio di usare nella operazione qualsivoglia monomio di esso; ciò non ostante, dopo che si è incominciato con uno, si deve proseguire col medesimo.

Il dividendo è bene di ordinarlo secondo l' esponente di qualche lettera in modo tale, che il primo di lui monomio abbia la detta lettera coll'esponente massimo: quindi con il prossimamente minore sia l' altro, e così proseguendo. L' uso poi insegnerà quale lettera sia talvolta più comoda di preferire.

Digitized by Google

ESEMPIO ·I

Divisore $a^3 + 3a^3b + 3ab^2$. *Quoto* $a^2 - 2ab$.

Dividendo $a^5 + 3a^5b + 3a^3b^2 - 2a^4b - 6a^4b^2 - 6a^2b^3$

$$- a^5 - 3a^5b - 3a^3b^2 + 2a^4b + 6a^4b + 6a^2b^3$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

La ragione, per cui debbano cassarsi le lettere comuni al dividendo, e al divisore, facilmente si scorge con riflettere, che la divisione scioglie ciò, che la moltiplicazione aveva composto: poichè dividendosi il prodotto per uno dei fattori, l'altro fattore deve essere il quoto: per esempio dividendosi ab per a, il quoto deve esser b, vale a dire deve cassarsi la lettera comune al dividendo, e al divisore.

Il che essendo verissimo, ed esprimendo gli esponenti in compendio quante volte si sarebbe dovuta scrivere la lettera, a cui sono affissi; ne viene, che sottraendosi nella medesima lettera l'esponente del divisore dall'esponente del dividendo; la differenza dei detti esponenti si deve porre nel quoto: mentre con fare così, veniamo a cassare le lettere comuni, come si è dimostrato doversi fare.

Se non si osservasse la regola accennata in quanto ai segni, moltiplicandosi il quoto per lo divisore, ed aggiungendovi il residuo; non tornerebbe il dividendo. Ma si è dimostrato, che fatta la detta moltiplicazione coll'aggiunta del residuo, debba ritornare il dividendo. Dunque i segni devono regolarsi come si è da noi prescritto.

In quanto ai coefficienti, non essendovi alcun di-

vario dell'Aritmetica comune; la dimostrazione deve essere quì ancora la stessa.

Talvolta si accenna la divisione da farsi, senza eseguirla. In questi casi se tanto il divisore, che il dividendo siano monomj; si esprimono per modo di frazione, come $\frac{b}{a}$: oppure ponendo prima il dividendo, quindi due punti, e poscia il divisore, come $b:a$. Ma se il dividendo, o il divisore, o ambedue siano polinomj; allora la divisione si accenna, col chiudere le dette quantità fra due parentesi, come sarebbe $(a+2b):(m+n)$; ed equivale ad $\frac{a+2b}{m+n}$, come è chiaro.

Talvolta accade, che la divisione può continuarsi in infinito, ed allora il quoto presenta dei termini in progressione geometrica crescente, o decrescente, e così il quoto diventerà una serie, che va all'infinito. Ma di simili progressioni parleremo più opportunamente in appresso (226).

ARTICOLO II.

Delle Frazioni dell'Algebra.

139. Se le operazioni eseguite nell' Aritmetica in quanto alle frazioni, debbano farsi nelle quantità letterali; tutto è facilissimo. Anzi le operazioni eseguite con quantità letterali potranno servirci di brevissime formole, per tenere a memoria le prescritte regole.

Se pertanto debbano ridursi al comun denominatore $\frac{b}{a}$; e $\frac{d}{c}$, avremo la prima $\frac{bc}{ac}$, e la seconda $\frac{ad}{ac}$. In queste espressioni algebriche chiaramente si vede la regola di ridurre le frazioni di specie diversa al comun

Digitized by Google

denominatore. Quindi coll'uso dei soliti segni si eseguisce la somma, e la sottrazione, dopo che le frazioni saranno ridotte al loro comun denominatore.

Nello stesso modo se debba moltiplicarsi $\frac{b}{a}$ per $\frac{d}{c}$; avremo il prodotto $= \frac{bd}{ac}$. Se poi debba dividersi parimente $\frac{b}{a}$ per $\frac{d}{c}$; avremo il quoto $= \frac{bc}{ad}$.

Tali espressioni, o per dir meglio formole generali, siccome non confondono le quantità adoperate per fattori nella moltiplicazione, e per divisore, e dividendo nella divisione, come fa l'Aritmetica comune; ci fanno vedere chiaramente il tenore delle respettive loro operazioni in tutti i casi.

ARTICOLO III.

Delle Potenze nelle quantità letterali, e numeriche.

140. Abbiamo già detto, che l' esponente di una quantità indica quante volte la detta quantità si sarebbe dovuta scrivere senza verun segno interposto: e però a^5 è $= aaaaa$. Sicchè nell'esponente meno un'unità abbiamo quante volte si è moltiplicata in se stessa la quantità, che è affetta del dato esponente.

141. La quantità moltiplicata per 1 si dice prima potenza, e moltiplicata per se stessa si dice quadrato, o seconda potenza: la quantità poi, che si è moltiplicata, per formare il quadrato, si chiama radice, o lato di esso quadrato. Sicchè $a \times 1 = a$ forma la prima potenza: $a \times a = a^2$ forma la seconda potenza, o quadrato, di cui a semplice è la radice.

142. Se il quadrato si moltiplichi per la sua ra-

Digitized by Google

dice, il prodotto forma un cubo, e la detta radice per rapporto ad esso si chiama radice cubica: come $a^2 \times a = a^3$: la quantità a^3 si dice cubo, ed a ne è la radice cubica.

Sicchè il quadrato è la seconda potenza, il cubo è la terza, e le altre sogliono indicarsi col nome di potenza quarta, quinta, sesta, e così in infinito: e l'esponente caratterizza il grado di tali potenze.

Dobbiamo a Keplero, ed a Cartesio le facili espressioni sopra indicate: giacchè gli Arabi con molto maggiore ingombro esponevano le potenze dei numeri.

143. Da quanto abbiamo detto si comprende, che cosa sia innalzare una quantità ad una data potenza, e cosa sia estrarne la radice. Noi ci ristringeremo in questo articolo ai quadrati, ed ai cubi: senza tralasciare peraltro la formola generale d' innalzare, e deprimere qualsivoglia potenza.

144. Prima di tutto convien mirare alla formazione delle potenze, acciò facile divenga l'estrazione delle radici. Sia dato il binomio $a + b$, e se ne formi il quadrato: noi lo avremo in $a^2 + 2ab + b^2$. Analizzando questo quadrato; noi troviamo, che contiene 1.° il quadrato della prima parte della radice: 2.° il doppio prodotto, ossia rettangolo della prima moltiplicata per la seconda: 3.° il quadrato della seconda parte. Lo stesso accade ancora, se la radice sia trinomia, o quatrinomia; considerando però sempre le prime parti fuori dell'ultima per una sola parte, e l'ultima parte per seconda.

145. Da ciò deriva la maniera di estrarre la radice quadrata nelle quantità letterali, ed anche nei numeri: come fra poco vedremo. Basta avere osservato la composizione del quadrato, ed usare colle medesime vedute la maniera contraria, per discioglierlo, e trovarne la respettiva radice, da cui fu formato. Noi lo faremo vedere colla pratica, per non adoperare inutilmente molte parole.

146. Quando in una quantità non potrà ottenersi la radice quadrata, o cubica, o di altra potenza; allora vi si pone semplicemente il segno $\sqrt{\ }$, che chiamasi *radicale*, se si tratti di radice quadrata, o con un 3, oppur 4 al disopra del detto segno, se trattisi di radice cubica, o di quarta potenza.

Newton peraltro ha trovato, che assai meglio s'indicherebbero le dette quantità radicali con un esponente frazionario. Onde in vece di scrivere $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a}$, quando si cerca la radice quadrata, o cubica, o di quarta potenza di a, vuole che si scriva $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{4}}$.

147. Se la quantità, da cui si vuole estrarre la radice, abbia l'esponente; dovrà questo dividersi per 2, se si cerca la radice quadrata: per 3, se si cerca la cubica: per 4, se la quadrato — quadratica: e così in infinito. Onde se si voglia la radice quadrata di a^6. avremo a^3: e se si voglia la cubica; avremo a^2. Dalla natura degli esponenti di sopra indicata (129) si comprende ad evidenza la ragione di tutto ciò.

Della Radice Quadrata nei numeri.

148. Veniamo ora all'estrazione della radice quadrata de'numeri. Si può facilmente osservare, che qualunque numero, non può avere nel suo quadrato più del doppio delle figure, che ha egli medesimo: giacchè 9, che è il numero più grande di quei di una sola figura, ha per quadrato 81: e così può osservarsi degli altri. Quindi nasce, che il numero, da cui vuole estrarsi la radice quadrata, si debba dividere in classi, ciascuna delle quali ha due sole figure: e se il numero delle figure è disparo; tocca alla prima classe a man

sinistra ad averne una sola. Ciò fatto, riandando all'analisi del quadrato già da noi indicata (144); si cerchi la radice quadrata della prima classe a man sinistra o esatta, se vi è, o la più prossima all'esatta, e si scriva in luogo delle radici. Di questa radice si formi il quadrato, e si sottragga dalle figure della detta prima parte, notandone il residuo. Si prenda poi per divisore il doppio della radice trovata, e si cali a destra dell' indicato residuo la seconda classe, e si faccia la divisione, negligentando l'ultima figura a man destra. Il quoto, che ne verrà, si deve porre in luogo della radice, ed anche a man destra del divisore, ed il divisore così accresciuto si moltiplichi per il detto quoto. Fatta poi la sottrazione di questo prodotto dal numero considerato per dividendo, comprendendovi anche la figura negligentata, se ne noti il residuo: e così si prosegua, fino a tanto che avremo classi da calare a destra del residuo della sottrazione indicata.

149. Si avverta peraltro 1.° che per divisore si adopera sempre il doppio delle radici trovate: 2.° che se il divisore non entri esattamente nel dividendo, neppure una sola volta; deve scriversi zero nel quoto, calarsi la classe seguente, e proseguirsi così l'operazione: 3.° che se il prodotto da sottrarsi sia maggiore del dividendo, si deve togliere qualche unità dalla radice, e riformarsi di nuovo l'operazione.

ESEMPIO I.

Operazioni regolari.	*Quadrato*	*Radice*
3 × 3 = 9.	13,83,84	372
	9	
Il doppio di 3 6	48,3	
Doppio della 1ª × 2ª ; 6 × 7 = 42	67	
Quadrato della 2ª ; 7 × 7 = 49	7	
Somma 469	469	
Il doppio del 37 74	0148,4	
Dop° delle 2ª 1ª × 2ª ; 74×2=148	742	
Quadrato della 2ª ; 2 × 2 = 4	2	
Somma 1484	148 4	
	0000	

La prova della estrazione della radice quadrata si fa, moltiplicando la radice trovata 372 in se stessa: come per se medesimo apparisce.

ESEMPIO II.

1,1 0,2 5	1 0 5
1	
0 1,0	
2 0	
0	
0 0	
1 0 2,5	
2 0 5	
5	
1 0 2 5	
0 0 0 0	

Digitized by Google

La dimostrazione dell'operato è manifestamente indicata dalla formazione, e risoluzione del quadrato dell' accennato binomio $a+b$, le quali cose si vedranno ocularmente, e con più precisione in pratica.

Della Radice cubica.

150. Passando ora all' estrazione della radice cubica, convien prima osservare la formazione del cubo nel binomio $a+b$. Fatte le debite operazioni, noi troviamo, essere il cubo dell' accennato binomio così: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Sicchè osserviamo nel cubo 1.° il cubo della prima parte della radice: 2.° il triplo quadrato della prima moltiplicato per la seconda: 3.° il triplo quadrato della seconda parte moltiplicato per la prima: 4.° il cubo della seconda parte.

151. Da questa analisi del cubo si comprende la maniera di estrarre la radice cubica. Che se le parti della radice sono più di due, le due trovate si considerano come la prima, cioè come una sola, e quindi si proseguirà nello stesso modo l'operazione.

152. L'estrazione della radice cubica in Aritmetica dipende dai medesimi principj, ed altra differenza non vi è, sennonchè quella, che propriamente nasce dal vario significato, che prendono i numeri, secondo la diversità del sito, in cui si trovano.

153. Si è osservato costantemente, ed è manifesto, che le cifre componenti un cubo, non possono essere più del triplo delle figure, che rappresentano la sua radice: per esempio il cubo di 9 è 729, cioè di tre sole figure. Da ciò è nata la regola di dividere le figure componenti il cubo in classi, ciascuna delle quali contenga tre sole figure. Toccherà peraltro alla prima ver-

so man sinistra l'esser composta di una, o due figure, se il numero di esse lo richiegga.

Ciò fatto, si abbia sempre innanzi agli occhi la formola generale del dato binomio elevato alla terza potenza, ed in essa scorgeremo la maniera di operare, e la ragione dell'operato.

ESEMPIO

		Quoto	*Operazioni*
	4 4,3 6 1,8 6 4	3 5 4	
	2 7		1 3 5
			2 2 5
2 7	1 7 3,6 1		1 2 5
	1 5 8 7 5		1 5 8 7 5
			1 4 7 0 0
			1 6 8 0
3 6 7 5	0 1 4 8 6 8,6 4		6 4
	1 4 8 6 8 6 4.....		1 4 8 6 8 6 4
	0 0 0 0 0 0 0		

In quest'esempio, disposte le cose, come notansi, si è trovata subito la radice cubica di 44, che è stata 3, ed il suo cubo 27 si è sottratto dal 44. Al residuo 17 si è aggiunta l'altra classe, ed ha formato 17361. Si è preso per divisore il triplo quadrato di 3, che è 27, e si è diviso per esso il 17361, negligentando le ultime due note a man destra. Il quoto 5 si è posto fra le radici, e quindi si è formato 1.° il triplo quadrato di 3 moltiplicato per 5: 2.° il triplo quadrato di 5 moltiplicato per 3: 3.° il cubo di 5, che in tutto hanno dato 15875, e questo sottratto dal 17361, ha dato 1486 di resto. Finalmente si è calata a destra di questo resto l'ultima classe, e fatto il triplo quadrato di 35, si è

diviso per esso il 1486864, negligentate le due ultime note, e si è proseguita l'operazione come di sopra, coerentemente a quanto si è osservato nel cubo del binomio $a + b$ testè indicato (150).

La prova della estrazione della radice cubica si fa, moltiplicando la radice trovata in sè stessa, e quindi formandone il cubo, il quale deve venire eguale al cubo, di cui essa è radice: come per sè stesso apparisce.

154. Se il numero, da cui si è estratta la radice, non era perfetto quadrato, o perfetto cubo, e vogliamo accostarci alla vera radice; possiamo aggiungere alla destra del residuo due zeri, se si tratti di quadrato; e tre, se si tratti di cubo, e proseguire l'operazione come prima: giacchè avremo in luogo della radice, oltre i numeri interi, delle frazioni decimali, che renderanno la radice più approssimante di prima. Ciò può farsi non una volta soltanto, ma quante volte si voglia, e ci anderemo sempre più accostando alla vera radice, senza potervi peraltro arrivare giammai.

Della Radice delle Frazioni.

155. Volendo estrarre la radice da una frazione; deve estrarsi tanto dal numeratore, che dal denominatore, e la radice del primo sarà il numeratore, e quella del secondo sarà il denominatore della nuova frazione, la quale indicherà la radice della data frazione.

156. Dal che ne siegue, che se di un numero non possa aversi la radice accurata; potrà esso ridursi ad una frazione di denominator dato, il quale abbia la radice giusta: e così ci accosteremo alla vera radice. Laonde se vogliamo accostarci alla vera radice di 2, possiamo ridurlo a $\frac{200}{100}$. Si estragga allora dal numeratore

la radice prossima, che sarà 14, e dal denominatore la vera, che sarà 10, ed avremo $\frac{14}{10}$: radice molto più prossima alla vera, di quello che fosse 1, che si sarebbe avuto; trattando il 2, come intero.

Da questa operazione chiara per sè stessa si comprende la ragione dell'aggiunta, che abbiamo detto, potersi fare di due zeri al quadrato (154), e di tre zeri al cubo, per avvicinarci alla vera radice di un numero non perfettamente quadrato, e non perfettamente cubo.

Della formazione delle Potenze.

157. Prima di dare la regola generale di trovare una data potenza, e d' innalzare il binomio $a+b$ a qualsivoglia potenza, senza passare per le intermedie, facendo un calcolo nojoso; convien' osservare come dobbiamo regolarci nei segni, nelle lettere, negli esponenti, e nei coefficienti.

Quanto ai segni tutto dipende da ciò che abbiamo detto nella moltiplicazione algebrica (137), e perciò si comprende bene, che i segni simili danno $+$, ed i dissimili danno $-$. Onde nelle potenze, che vogliono formarsi dal binomio di $a+b$, tutti i termini saranno positivi, e nelle potenze di $a-b$ il primo sarà positivo, ed il secondo negativo, e così alternativamente degli altri.

Le lettere già si sa, come debbansi regolare, essendosi altrove (137) notato, che le lettere devono disporsi secondo l'ordine alfabetico.

Si è osservato ancora (144) rispetto agli esponenti, che nel primo termine si trova la sola prima lettera con l'esponente massimo della potenza, a cui si vuole elevare il binomio $a+b$. Nel secondo termine si trova la prima, e seconda lettera con l'esponente nella pri-

ma scemato di una unità, e nella seconda coll'esponente 1: e così proseguendo, si troverà poi nell'ultimo termine la sola seconda lettera con il suo massimo esponente.

Quanto ai coefficienti Newton ne ha generalizzata la regola, determinando, che il coefficiente di ciascun termine si ottiene, col moltiplicare l'esponente della prima lettera del termine antecedente per il coefficiente del medesimo termine, e col dividere il prodotto per un numero, che esprima il posto, che occupa il medesimo termine.

Posto ciò, avremo la 9.ª potenza di $a+b$ così

$$a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9.$$

158. Per maggiormente inoltrarci nell'uso di questa formola, convien considerare un poco meglio la varietà degli esponenti possibili. Essendo infiniti i numeri interi; tosto s'intende, che possono essere infiniti anche i detti numeri interi affetti del segno $-$, e però convien vedere qual sia il significato di un' esponente affetto di detto segno. Finalmente possono essere infinite frazioni o vere, o spurie affette del segno positivo, o negativo $+$, o $-$.

Per intendere il significato degli esponenti nel secondo, e terzo caso, convien ricordarsi, che dovendosi fare la divisione, quando la medesima lettera è dividendo, e divisore con diverso esponente; deve sottrarsi l'esponente del divisore da quello del dividendo: cosicchè $a^6 : a^3 = a^3$ (138).

159. Posti tali principj, nella divisione di $a^m : a^n = a^{m-n}$ o m è $> n$; o $m <$ di n; o $m = n$: vale a dire, che o m è maggiore di n; o m è minore di n; o $m = n$. Nel primo caso l'esponente del quoto sarà positivo, nel

secondo sarà negativo, e nel terzo $= 0$. Onde $a^5 : a^4 = a$; così pure $a^5 : a^6 = a^{-1}$; e finalmente $a^5 : a^5 = a^0$. Da ciò s'intende, che a^{-1} significa $1 : a$, ed a^{-2} significa $1 : a^2$, dove a^0 significa 1.

160. Dovendosi poi estrarre la radice da una lettera affetta di esponente, siccome dobbiamo in questo caso dividere l'esponente per 2, se si tratti di radice quadrata, per 3, se di radice cubica; nasceranno quindi gli esponenti frazionarj, nei quali il numeratore esprime la potenza, a cui si è elevata la quantità, e il denominatore esprime la radice, che si desidera di estrarre dalla detta quantità. Perciò, se l'esponente sarà $\frac{1}{2}$, come $a^{\frac{1}{2}}$; significa la radice quadrata di a, ed $a^{\frac{3}{2}}$ significa, che si vuole la radice quadrata di a^3; e così dicasi di altri esponenti.

161. Dopo di aver capito, che l'esponente $\frac{1}{2}$ significa la radice quadrata, ed $\frac{1}{3}$ la cubica, se si faccia una formola generale per l'elevazione del binomio $a + b$ a qualunque potenza nel modo, che siegue, e se si sostituiscano quindi questi valori ad m; potremo con tal formola generale approssimarci alle radici qualunque di una quantità letterale, di cui non possa aversi radice accurata. Ecco il principio della detta formola, il cui proseguimento è facile a capirsi da ognuno dietro l'esposte teorie.

Digitized by Google

FORMOLA GENERALE

$$a^m + m\,a^{m-1}\,b + \frac{m(m-1)}{2}\,a^{m-2}b^2 + \text{ec.}$$

ARTICOLO IV.

Del calcolo de' Radicali.

162. Quantità radicale dicesi quella, a cui, non essendosi potuto estrarre la radice esatta; si è prefisso il segno $\sqrt{}$, che *radicale* si appella. Onde $\sqrt{}$, ed $\sqrt[5]{a}$ sono due quantità radicali. Gli Aritmetici sogliono chiamarle anche numeri *sordi*, o *irrazionali*: e si dividono in *incommensurabili*, ed in *immaginarie*. Noi parleremo distintamente di entrambi, assegnando in poche parole in quest'articolo la maniera di maneggiarle nei respettivi loro casi.

Delle Radicali Incommensurabili.

Le radicali incommensurabili vanno soggette a tutte quelle operazioni, che prescrivemmo fin quì, e che rapportansi alla soluzione dell'equazioni. Eccole tutte.

Della Riduzione.

163. Si è già veduto altrove, che dalle radicali incommensurabili può estrarsi la radice per approssimazione (154). Ma se tali quantità incommensurabili possono esser divise senza resto per una qualche quantità elevata ad una potenza indicata dall'esponente della radice; allora si può ridurre questa espressione ad altra più semplice, scrivendo questa quantità come un coef-

ficiente della radice, e mettendo il solo quoziente sotto il segno radicale. Così $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Similmente $\sqrt[3]{432}$ è tale, che 432 può dividersi senza resto per il cubo di 3, che è 27; per il cubo di 6, che è 216; per il cubo di 2, che è 8. Poichè $\frac{432}{27} = 16$; $\frac{432}{216} = 2$; $\frac{432}{8} = 54$. Dunque $\sqrt[3]{432}$ potrà ridursi ad una di queste espressioni equivalenti $3\sqrt[3]{16}$: o a $6\sqrt[3]{2}$; o finalmente a $2\sqrt[3]{54}$. E per esprimer tutto con una formola generale, diremo: $\sqrt{m^2 n} = m\sqrt{n}$; ed anche $\sqrt[3]{m^3 n} = m\sqrt[3]{n}$. Si riducono poi sempre due per due successivamente, quando sono molte le radicali da ridursi.

Della Somma.

164. La somma delle quantità radicali incommensurabili si eseguisce in due maniere. Poichè tali quantità ridotte che saranno, o si trovano simili fra loro, aventi cioè lo stesso esponente, e la stessa quantità sotto il segno $\sqrt{\ }$; ed allora se ne fa la somma come nelle quantità commensurabili, sommando i loro coefficienti: o si trovano dissimili; ed allora se ne fa la somma, unendole una all'altra coi respettivi loro segni. Questo secondo caso è chiaro per se. Del primo poi eccone qui appresso un

ESEMPIO

$$\frac{p}{d}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} + \frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{py + dx}{dy}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Della Sottrazione.

165. La sottrazione delle radicali incommensurabili si fa col mutare il segno alla quantità da sottrarsi, facendo sì, che il segno del di lei coefficiente passi da $+$ in $-$, e da $-$ in $+$. Ma se le quantità sono simili (164); allora si prenderà la differenza dei coefficienti.

ESEMPIO

$$\frac{p}{d}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}-\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{py-dx}{dy}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Della Moltiplicazione.

166. La moltiplicazione per lo più si accenna soltanto. Se poi voglia eseguirsi; dovranno osservarsi queste regole nei differenti casi, che possono darsi.

1.° Se le quantità da moltiplicarsi sono ambedue incommensurabili; non si ha da far altro, che moltiplicare le quantità, che sono sotto il segno $\sqrt{\ }$, e mettere lo stesso segno alla testa del prodotto, e se vi è riduzione da farsi, si faccia. Per esempio $\sqrt{3cd}\times\sqrt{4cg}=\sqrt{12c^2dg}=2c\sqrt{3dg}$ (163).

2.° Se le quantità radicali da moltiplicarsi sono eguali; basta togliere semplicemente il segno $\sqrt{\ }$, e saranno moltiplicate. Per esempio $\sqrt{a^5cd}\times\sqrt{a^5cd}=a^5cd$.

3.° Se la quantità, per cui si ha da moltiplicare un $\sqrt{\ }$, è commensurabile; in tal caso possiamo contentarci di scriverla avanti il segno $\sqrt{\ }$ con una sbarra di sopra, se è composta di più termini. Onde $a+b\times\sqrt{dg}=\overline{a+b}\sqrt{dg}$. Ma se questa quantità commensu-

rabile vuol farsi entrare sotto il $\sqrt{\ }$; bisogna prima quadrarla, e poi moltiplicarla per la quantità, che è sotto il segno $\sqrt{\ }$. Laonde avremo
$\overline{a+b} \times \sqrt{d^2g} = \sqrt{(a^2+2ab+b^2)} \times d^2g = \sqrt{\ }$ ec.

4.° Se le quantità da moltiplicarsi sono composte di molte altre in parti radicali, ed in parte commensurabili; l'operazione sarà come le precedenti: purchè si osservino le regole della moltiplicazione delle quantità complesse (137). Onde $(3a\sqrt{bc} - 2b\sqrt{ac}) \times 2c\sqrt{ab} =$ $(\sqrt{9a^2bc} - \sqrt{4ab^2c}) \times \sqrt{4abc^2}$, mettendo sotto il segno $\sqrt{\ }$ ciò, che è fuori. Fatta poi la moltiplicazione, sarà $(\sqrt{9a^2bc} - \sqrt{4ab^2c}) \times \sqrt{4abc^2} = \sqrt{36a^3b^2c^3} - \sqrt{16a^2b^3c^3}$: e riducendo, sarà $= 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$.

5.° Se finalmente i radicali hanno diverso esponente; bisogna ridurli allo stesso esponente, e poi fare la moltiplicazione. Onde $\sqrt[3]{ab} \times \sqrt[5]{ab^2} = \sqrt[15]{a^5b^5} \times \sqrt[15]{a^3b^6} = \sqrt[15]{a^8b^{11}}$.

Della Divisione.

167. La divisione nelle quantità radicali suol farsi con quel medesimo tenore di regole, che sono state ora prescritte per la moltiplicazione. Onde stimo inutile, e superfluo il ripeterle, rapportandone i soli esempj per ogni caso.

Caso I. $\sqrt{\frac{ab}{a}} = \sqrt{b}$.

II. $\frac{\sqrt{a^3cd}}{\sqrt{a^3cd}} = \frac{a^3cd}{a^3cd} = 1$.

III. $\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2}{a}}=b\sqrt{\frac{a^2+1}{a}}$

IV. $\frac{\sqrt[3]{a^2b^4+b^2}}{\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}}=\frac{\sqrt[3]{8a^2b^5+8b^3}}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}=\frac{2b\sqrt[3]{a^2b^2+1}}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}$

V. $\sqrt[3]{ab}:\sqrt[5]{ab^2}=\sqrt[15]{a^5b^5}:\sqrt[15]{a^3b^6}=\sqrt[15]{\frac{a^2}{b}}$

Delle potenze de' Radicali.

168. Volendosi alzare le radicali a qualche potenza dello stesso esponente, che ha il radicale, basta togliere il segno radicale. Onde $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$. In altri casi si opera nella maniera ordinaria. Onde $\sqrt{a}$, se voglia innalzarsi alla terza potenza, avremo $\sqrt{a^3}$. Se poi la quantità da innalzarsi ad una data potenza sia in parte radicale, ed in parte commensurabile; altro non si ricerca, sennonchè di porre sotto il radicale la quantità commensurabile, che gli sta innanzi.

ESEMPIO

Se questo radicale $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ debba elevarsi alla potenza generale $\frac{u}{s}$; dovranno osservarsi le seguenti regole.

1.° Si metta $\frac{a}{b}$ sotto il $\sqrt[n]{\ }$, ed avremo $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}\,\frac{c}{d}}$ (163)

2.° Si liberi $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}\frac{c}{d}}$ dal $\sqrt[n]{\ }$, ed avremo allora

(146, e 147) $$= \frac{a^{\frac{n}{n}}\, c^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}\, d^{\frac{1}{n}}}$$

3.° S' innalzi quest' ultima frazione alla richiesta potenza di $\frac{u}{s}$, ed avremo (141, 142)

$$\frac{a^{\frac{nu}{ns}}\, c^{\frac{u}{ns}}}{b^{\frac{nu}{ns}} .\, d^{\frac{u}{ns}}}$$

4.° Si rimetta quest'ultima frazione sotto il segno radicale, ed avremo (146)

$$\sqrt[\frac{ns}{u}]{\frac{a^n c^1}{b^n d^1}} = \sqrt[\frac{ns}{u}]{\frac{a^n}{b^n}\frac{c}{d}}$$

Delle Radici dei Radicali.

169. Se da un radicale voglia estrarsi la radice qualunque, come per esempio, se da $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ voglia estrarsi la radice generica $\frac{u}{s}$; si osserveranno le seguenti regole.

1.° Si metta $\frac{a}{b}$ sotto il $\sqrt[n]{\ }$, ed avremo (163)

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}\,\frac{c}{d}}$$

2.° Si tolga il $\sqrt[n]{\ }$, ed avremo (146)

$$\frac{a^{\frac{n}{n}}\;c^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}\;d^{\frac{1}{n}}}$$

3.° Si estragga la radice $\frac{u}{s}$, ed avremo (141, e 142)

$$\frac{a^{\frac{ns}{nu}}\;c^{\frac{s}{nn}}}{b^{\frac{ns}{nu}}\;d^{\frac{s}{nu}}}$$

4.° Si rimetta sotto il $\sqrt{\ }$, ed avremo (146, e 147)

$$\sqrt[\frac{nu}{s}]{\frac{a^n}{b^n}\,\frac{c}{d}}$$

Delle Radicali immaginarie.

170. Le quantità immaginarie si trattano nell'istesso modo, con cui abbiamo trattato le radicali incommensurabili nel numero precedente. Si badi però, che

Digitized by Google

$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, non dà $\sqrt{a^2}$, come pare, che dovrebbe essere, secondo la proprietà della moltiplicazione (137). Ma dà bensì $\sqrt{(-a)^2}$; ed in conseguenza $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a)^2} = -a$.

ARTICOLO V.

Dell'Equazioni, ossia dell'Analisi.

171. L'analisi è l'arte di sciogliere per mezzo del calcolo algebrico tutti i Problemi, che possono darsi su le grandezze.

Proporre un Problema è lo stesso, che domandare, che si trovi il valore di una, o più grandezze, a norma dei rapporti, che vengono indicati fra le quantità cognite, ed incognite.

Sciogliere poi un problema altro non è, sennonchè trovare il valore di una, o più incognite, atteso i rapporti, che esse hanno con delle quantità cognite. Questi rapporti si chiamano *condizioni del problema*: perchè si conosce da esse, sotto quali condizioni abbiasi l'eguaglianza fra le quantità cognite, ed incognite.

Se dopo di aver considerato queste condizioni, si formino dei risultati, che abbraccino le quantità cognite, ed incognite, e gli accennati rapporti sieno eguali fra di loro; allora avremo posto il problema in lingua algebrica, cioè lo avremo *intavolato*.

L'espressione algebrica di tal natura si chiama *equazione*. D'onde avviene, che l'equazione è un'espressione composta di termini algebrici, risultanti dalle date quantità, e dalle incognite, e disposti col segno $=$ da ambe le parti.

Sogliono le quantità incognite indicarsi colle ultime lettere dell'Alfabeto x; y; z ec., e le cognite colle

prime a; b; c ec. Se nell'equazione abbiamo dei semplici x; y; z, l' equazione sarà di primo grado, che dicesi anche *lineare*. Se poi vi avremo x^2, oppure $x \times y$, l' equazione sarà di secondo grado, ossia *quadratica*. Parleremo ora di queste due soltanto: giacchè quelle di terzo, e quarto grado hanno delle particolari difficoltà da non intendersi per ora, e di quella di quinto grado se n'è dimostrata l'impossibilità della risoluzione.

172. Intavolati che sono i problemi di primo, e secondo grado, la soluzione è facilissima. Tutto l'artifizio si riduce nel lasciare sola da una parte dell'equazione la quantità incognita, e dall'altra parte le quantità cognite: come in pratica osserveremo.

Dei Problemi di 1.° Grado.

173. Per giungere al fine di ridurre da una sola parte della equazione la quantità incognita, e dall' altra parte tutte le quantità cognite nei problemi di primo grado, basta liberare l' incognita dalle cognite per mezzo della somma, o della sottrazione, che si eseguiscono nella *Trasposizione*: o per mezzo della moltiplicazione, o della divisione.

Si comprenderà poi assai facilmente la ragione di tutte queste operazioni, se riflettasi, che se le quantità eguali ricevano l'aggiunta, o la sottrazione di quantità parimente eguali, o sieno moltiplicate, o divise per quantità eguali; rimarranno sempre eguali, senza alterazione alcuna.

Della Trasposizione.

174. La Trasposizione consiste nel trasportare un termine da un membro in un' altro della equazione,

Digitized by Google

senza però, che si muti punto l'eguaglianza fra essi membri. Per ottenere ciò, si tolga questo termine dal membro, dove è, e con segno contrario si trasporti nell'altro membro.

Sia $ac + x = d$. Per trasportare il termine ac, si sottragga dall'uno, e dall'altro membro della equazione, e si avrà $ac + x - ac = d - ac$: fattane la riduzione, avrassi $x = d - ac$. È chiaro, che questa ultima equazione non ha valore differente dalla prima.

Dunque possiamo per mezzo della trasposizione, ossia della somma, e della sottrazione rendere positivo un termine negativo, e negativo un termine positivo. Si scorge ancora dall' accennato esempio, che si può prendere il valore di un termine qualunque, con lasciarlo solo in uno dei due membri.

Della Moltiplicazione.

175. La moltiplicazione serve, per fare svanire le frazioni, che trovansi nell' equazioni, senza però alterare punto l'uguaglianza dei membri. Per esempio, nella equazione $a + \frac{b}{x} = dx$, se voglia farsi svanire il denominatore x; convien moltiplicarlo per gli altri termini: e si avrà $ax + \frac{bx}{x} = dx^2$, ossia $ax + b = dx^2$; fattane cioè la riduzione dopo la moltiplicazione.

Dunque, per fare svanire le frazioni da una equazione, devesi moltiplicare ciascun denominatore per gli altri termini della equazione.

Della Divisione.

176. La divisione serve a liberare una incognita dalle cognite, colle quali è essa moltiplicata, senza però, che il valore della equazione si alteri alcun poco.

Per esempio, se nella equazione $bx - ac = d - cd$ voglia liberarsi x da b, convien dividere per b tutti gli altri termini. Onde avremo nel caso nostro $\frac{bx}{b} - \frac{ac}{b} = \frac{d}{b} - \frac{cd}{b}$, ossia $x - \frac{ac}{b} = \frac{d}{b} - \frac{cd}{b}$.

Similmente $ax - x = b$, diverrà $x = \frac{b}{a-1}$; facendone la divisione per a, e riducendo quindi i termini secondo il solito.

Si rifletta in primo luogo, che trovandosi in tutti i termini della equazione una lettera stessa, dovrà per questa lettera dividersi tutta l'equazione: e così si dividerà più semplice assai. Per esempio posto $a^2c - a^2 = a^2bd$, si dividerà tutto per a^2, e si avrà $c - 1 = bd$.

Si osservi in secondo luogo, che quando in più termini di una equazione complessa trovasi la stessa lettera; quella unitamente alla somma delle altre lettere, o dei coefficienti, che in assi termini ritrovansi, costituirà il fattore di tutto il prodotto. Così $ax - bx + 3x$ è il prodotto di $a - b + 3 \times x$. Laonde se nella equazione $ax - bx + 3x = d$ voglia liberarsi x dai coefficienti, dee farsi $x = \frac{d}{a - b + 3}$.

Dunque per liberare un'incognita da una, o più cognite, colle quali è essa moltiplicata, bisogna dividere gli altri termini per le cognite. Per mezzo dunque della divisione si rende l'equazione più semplice.

Della Sostituzione.

177. Oltre le descritte operazioni, ci serviamo talvolta della Sostituzione. Questa operazione consiste nel mettere nella equazione in vece di una data quantità un'altra dell'istesso valore. Per esempio, se $3x + y$ sia $= a$, ed anche se sia $y = b$; sostituendo nella prima equazione b ad y, diverrà essa $3x + b = a$, oppure $x = \frac{a - b}{3}$.

Della Soluzione dei Problemi.

178. Per risolvere un problema, bisogna 1.° considerare attentamente lo stato della questione, distinguere le condizioni, e le cognite dalle incognite: 2.° esprimere il problema in una maniera astratta, e generale per mezzo di lettere, impiegandone meno, che sia possibile, e badando attentamente di non esprimere le quantità eguali con lettere differenti, come pure le parti delle quantità eguali, ma con una sola lettera istessa esprimendo soltanto, se faccia d' uopo, i denominatori, o coefficienti: 3.° esprimere ciascuna condizione del problema con una equazione: 4.° in una soluzione completa devono essere tante equazioni, quante sono le incognite: dal che nascono quattro specie di problemi differenti.

Se nella soluzione del problema si trovano tante equazioni, quante sono le incognite; il problema si dice *Determinato*: cioè non ammette, che un numero determinato di soluzioni.

Se vi sono meno incognite, che equazioni; il problema si dice allora *Più—che—determinato*: vale a dire eccessivo, di cui perciò non si ha ordinariamente la so-

luzione, e se ne scopre spesso la impossibilità dalle contraddizioni, che trovansi nell'equazioni.

Se sono più le incognite, che le equazioni; il problema si dice *Indeterminato:* giacchè per risolverlo in qualche maniera, convien determinare ad arbitrio una, o più incognite, onde nella equazione resti una sola incognita. Dal che si vede, che potendo essere infiniti i numeri da prendersi ad arbitrio; quindi infinite saranno le soluzioni di tali problemi.

Se peraltro si aggiunga ai problemi indeterminati la condizione, che i numeri debbano essere *positivi*, ed *interi*, nè sia in arbitrio di prenderne altri, fuori di questi; allora il problema si dice *Semideterminato*: cioè determinato in qualche modo, e capace di soluzione. Dal che si vede, che se la condizione sarà, che i numeri non solamente sieno positivi, ed interi, ma inoltre sieno o quadrati, o cubi ec. il problema diventa semi-determinato di secondo, o di terzo grado ec.: ed è anche allora determinabile in qualche modo, e capace di essere sciolto colle regole dei problemi di 2.°, o 3.° grado ec.

179. Dopo queste necessarie riflessioni, sarà cosa facile, di trovare il valore di ciascuna incognita per mezzo delle regole di sopra prescritte (173). Si avverta peraltro, che non è essenziale, di usare sempre scrupolosamente tutte queste regole: giacchè talvolta una leggiera riflessione può abbreviarne il calcolo.

Cominciamo a porre in pratica le indicate regole nella soluzione dei problemi Piucche—determinati, affine di dare di essi una qualche idea, per passare quindi, dopo qualche esempio su i problemi Indeterminati, e Semi—determinati, ai problemi Determinati, su i quali sopra tutto ci fonderemo.

Digitized by Google

Dei Piucche—determinati.

Trovare due numeri, la cui somma sia 8; la differenza sia 3; ed il prodotto sia 18. Ognun vede, che il problema è d'impossibile soluzione. Poichè se si chiamino i due nnmeri x, ed y; l'equazioni saranno queste tre, $x + y = 8$; $x - y = 3$; $xy = 18$, in forza delle tre assegnate condizioni. Ora di esse le due prime equazioni si oppongono alla terza: mentre da esse risulta, che $x = 5$; $y = 3$: e $5 \times 3 = 15$, e non mai a 18, Sicchè il problema sarà di soluzione impossibile: e lo saranno ancora tutti gli altri consimili problemi, nei quali le condizioni ci conducono ora ad assurdi, ed ora a soli valori immaginarj nella soluzione dei medesimi.

Degl'Indeterminati.

Trovare due numeri, la somma dei quali sia $= 8$. Nominando i due numeri x, ed y; la equazione sarà $x + y = 8$: dove si vede, che per quanta industria si adoperi, non potrà mai determinarsi, quali sieno i numeri cercati. Laonde tali problemi non si scioglieranno giammai, se non si rendano prima Semi—determinati.

De' Semi—determinati.

Per rapporto ai problemi *Semi—determinati*, due cose fa d' uopo avvertire. 1.° Che il numero delle incognite non sempre si ricava dal numero delle domande, le quali possono essere talvolta identiche: e perciò tali, che la soluzione di una sia la stessa, che quella d'un'altra. 2.° Che debbano riggettarsi, ed ommettersi nella intavolazione tutte le condizioni superflue, ed aversi in considerazione tutte le necessarie relazioni soltanto,

che hanno le date quantità alle quantità, che cercansi. Quindi se dalle dette relazioni non si ricavino tante equazioni, quante sono le incognite; e nella equazione finale si trovino tuttavia più incognite; allora è certo, che per determinare il valore di una di esse, deve assumersi ad arbitrio il valore di una almeno dalle superstiti.

Per esempio, trovare due numeri, la somma dei quali sia 28. Sieno i due numeri x; y. Sarà $x+y=28$. Non essendovi altra equazione, per ottenere una sola incognita da una parte della equazione, e siccome la condizione è, che sieno i numeri da prendersi ad arbitrio *positivi*, ed *interi* (178); quindi determino arbitrariamente $y=16$: dal che deduco, essere $x=12$.

Similmente trovare due numeri x; y di tal natura, che sia $3x-2y=20$. Sarà dunque $x=\frac{20-2y}{3}$. Dal che rilevasi, 1.° che y debba essere minore di 10, altrimenti x sarebbe negativo: 2.° che lo stesso y sia minore ancora di 9, e di 8, onde il valore di x non degeneri in frazione: 3.° che x debba essere minore di 7. Dunque y non può avere altri valori di questi, cioè 7; 4; 1, ai quali corrispondono i valori di x nei numeri 2; 4; 6: e mentre i primi formano una serie aritmetica decrescente colla differenza $=3$, i secondi formano una serie crescente colla differenza $=2$: come a suo luogo vedremo.

Dei Problemi Determinati.

PROBLEMA I.

Riferisce un'Autore, che un tale Cavaliere, dopo più anni di studj confusi, intraprese sotto di lui un corso di lezioni metodiche: e che nei primi fervori, do-

Digitized by Google

po di avere riformate le proprie idee, apprese altre 24 cognizioni di più. Ma di ciò non contenta la madre del giovane studente, volle regolarne ella gli studj, e fare, che tutto dipendesse dalla di lei disposizione. Dal che avvenne, che il Cavaliere dimenticatosi nel 1.° mese di $\frac{1}{6}$, nel 2.° mese di $\frac{1}{3}$, e nel 3.° mese di $\frac{1}{2}$ di ciò, che sapeva; non gli restò cognizione alcuna scientifica, e cessò di più studiare.

Si cerca quante fossero le cognizioni del Cavaliere, allorchè intraprese il corso di lezioni metodiche? quali cognizioni chiamiamo x, ed a è il 24.

INTAVOLAZIONE

$$x + a = \frac{x + a}{6} + \frac{x + a}{3} + \frac{x + a}{2}.$$

SOLUZIONE

Fatte le moltiplicazioni, sarà

$$36x + 36a = 6x + 6a + 12x + 12a + 18x + 18a$$

Fattane la riduzione, sarà

$$36x + 36a = 36x + 36a\text{, ossia } x = 0.$$

Di fatti $24 - \frac{24}{6}, \frac{24}{3}, \frac{24}{2}$ dà $24 - 24$ cioè 0.

Dunque il Cavaliere nulla sapeva, e nel nulla restò in fine delle sue lezioni: dolendosi la madre inutilmente dell' indebita sua cura per l' istruzione scientifica del figlio, che era assai ben diretto.

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Una celebre Signora aveva il valsente x, quando chiamata alla Corte entrò in gara colle prime Dame di essa per suoi capricci diversi. Spendette nei primi anni cento mila ducati per suo mantenimento bizzarro, e guadagnò in Corte la sesta parte del suo valsente. Negli anni seguenti spendette lo stesso, e guadagnò l' ottava parte del suo valsente. Nell'ultimo anno spendè lo stesso, e per un sinistro accidente scapitò due terzi del suo valsente, e rimase col debito di sessanta mila ducati. Si cerca qual fosse il primo valsente della detta Signora.

Sia la spesa di $300000 = a$; il debito di $60000 = b$.
Dunque diremo $x + \frac{x}{6} + \frac{x}{8} - \frac{2x}{3} - a = - b$.
Dunque sarà $144x + 24x + 18x - 96x - 144a = - 144b$.
Dunque sarà $90x = 144a - 144b$.
Dunque $x = \frac{43200000 - 8640000.}{90}$ $d^e x = 384000$.

PROBLEMA III.

Tizio ha tre figli, uno de'quali essendo nato senza sua saputa; vuole, che nulla percepisca dei suoi beni dopo la sua morte: ma vuole, che li abbiano gli altri due in egual porzione. Intanto non dice chi sia questo suo figlio illegittimo: dice bensì, che i suoi beni rendono 28 ducati all'anno: ed ordina, che il primo figlio ne abbia uno più del secondo, ed il secondo tre più del terzo. Fatta questa divisione, chi avrà percepito meno di tutti dovrà dare annualmente della sua porzione tre ducati a chi avrà avuto più, e quattro ducati a chi

avrà avuto meno degli altri due fratelli, e così sarà adempita la volontà del padre.

Chi sarà lo spurio dei tre figli: che chiamiamo x; y; z?

Dunqne diremo $x=y+1$; $y=z+3$; $z=y-3$.
Siccome $x+y+z=28$; sostituendo, sarà $y+1+y+z=28$.
Sostituendo altra volta, sarà $y+1+y+y-3=28$.
Dunque riducendo, sarà . . . . $3y=28+2$.
Dunque si trova, che $y=10$; $x=11$; $z=7$.
Dunque il terzo figlio è lo spurio, che cercasi.

Dei Problemi di secondo grado.

180. Nella equazione di secondo grado, dopo di avere colle regole accennate di sopra (173) ridotte le quantità incognite da una parte della equazione, e dall'altra le sole cognite, possono darsi due casi. O l'incognita elevata alla seconda potenza è sola, come x^2, ed allora altra difficoltà non vi è, sennonchè estrarre la radice quadrata della quantità cognita, per trovare il valore di x. O nella parte della incognita oltre all' x^2, abbiamo x moltiplicato per qualche cognita, ed allora, affinchè la quantità di quel membro della equazione, ove sono le incognite, divenga un perfetto quadrato, onde possa da esso estrarsi la radice quadrata, vi si aggiungerà il quadrato della metà di quelle cognite, che servono di coefficiente all'incognita: e lo stesso quadrato, per conservare l'eguaglianza, si aggiungerà anche all' altra parte della equazione, ove trovansi le sole cognite.

Ciò meglio s'intenderà colla formola generale. Ogni equazione di secondo grado nelle accennate circostanze potrà rappresentarsi da $x^2+px=q$. Per compire il

quadrato, acciò possa estrarsene la radice, aggiungeremo ad ambe le parti della equazione $\frac{1}{4}p^2$. L'equazione allora sarà così $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$. Ed estrattane la radice (145), avremo questa nuova equazione $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, ossia $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$. E con formola generale, sarà $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

Per comprendere la ragione, su cui poggia questo metodo, si rifletta, che nel quadrato, per esempio, di $x + a$, che è $x^2 + 2ax + a^2$, si trova il quadrato della quantità cognita a^2; il quadrato della quantità incognita x^2, ed il doppio della cognita $2a$ moltiplicata per la incognita x, qual cognita $2a$, se ben si rifletta, è il coefficiente del secondo termine del detto quadrato, siccome in generale qualunque quantità nota, che moltiplica l'incognita in qualsivoglia termine della equazione, si chiama coefficiente di esso termine. Ora la metà del coefficiente del secondo termine viene ad essere la radice del terzo termine a^2. Di fatti nel detto quadrato $x^2 + 2ax + a^2$ la metà del $2a$, che è a, viene ad essere la radice del terzo termine a^2. Dunque se per mancanza del terzo termine, non si abbia il quadrato perfetto della radice binomia, può esso supplirsi colla metà del coefficiente del secondo termine elevata alla seconda potenza; ed aggiunta ad ambedue i membri della equazione, per mantenere l'eguaglianza, quale ocularmente si scorge nella indicata formola generale. Così avendo, a cagion di esempio, $x^2 - ax = b^2$; per com-

Digitized by Google

pire questo quadrato, si aggiungerà ad ambedue le parti $\frac{1}{4}a^2$: ed averassi $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$: ed estrattane la radice, sarà $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$; cioè $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2.\right)}$

181. Si premette al segno radicale $+$, o $-$, per indicare, che un quadrato, il quale deve essere sempre positivo, sarà lo stesso, o la sua radice sia negativa, o positiva, e che in conseguenza i problemi hanno, come suol dirsi, due radici.

182. Spesso accade, che debba aggiungersi ad ambedue i membri della equazione qualche termine, onde possa così estrarsi dall'equazione la radice. Laonde se alla equazione $x^2 + 2ax = a^2$, si aggiunga in ambe le parti a^2, si ha: $x^2 + 2ax + a^2 = 2a^2$, la cui radice $x + a$ sarà $= \sqrt{2a^2}$.

183. Talvolta nello sciogliere i problemi di secondo grado, potremo imbatterci in *radici immaginarie*, di cui daremo quì un'idea con rapportarci per brevità, e per maggior chiarezza alla formola generale indicata di sopra (180).

Considerando noi dunque $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$; troveremo, che dovendo per necessità essere positivo il $\frac{1}{4}p^2$, e potendo essere negativo il q; potranno darsi tre casi, cioè o q è minore di $\frac{1}{4}p^2$; o gli è eguale; o finalmente è maggiore. Nel primo caso la quantità sotto il segno radicale sarà positiva, nel secondo sarà $= 0$, e nel terzo sarà affetta di segno negativo essa

quantità posta sotto il radicale. Ma siccome è impossibile, che un quadrato abbia il segno negativo, sarà anche impossibile la sua radice, e perciò una tale radice si chiama *immaginaria.*

Quando ci incontriamo in tali radici, siamo assicurati o della impossibilità del problema, o della impossibilità della strada da noi presa. L'uso peraltro delle radici immaginarie non è infrequente nei calcoli algebrici dell'Algebra Sublimiore specialmente, come andremo a vedere in altri Autori, dopo questi brevi Elementi, ne' quali la dottrina delle Equazioni, ossia Analisi è stato sufficientemente spiegata, e diverrà anche più chiara colla soluzione dei seguenti problemi.

PROBLEMA I.

Si cerca un numero, il cui quadrato tre volte preso unitamente al sestuplo di esso numero dia 72.

A norma delle condizioni apposte, l'equazione sarà così: $3x^2 + 6x = 72$. Dividendo tutto per 3, avremo $x^2 + 2x = 24$: ed aggiunto il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, si avrà $x^2 + 2x + 1 = 24 + 1$. Dunque, estrattane la radice, sarà $x + 1 = 5$. Dunque, trasponendo, sarà $x = 5 - 1$. Dunque $x = 4$. Di fatto $3x^2 + 6x = 48 + 24 = 72$, secondo appunto le condizioni del problema.

PROBLEMA II.

Si cerca un numero x, che unito a 156 faccia il quadrató del medesimo x. Sia $156 = b$. Dunque $x + b = x^2$. Dunque $x^2 - x = b$. Si aggiunga il quadrato della metà del coefficiente del termine $- x$, che

sarà $\frac{1}{4}$: (poichè quando non vi è altro coefficiente in un termine, vi s' intende sempre l' unità, e nel nostro caso la metà di 1 è $\frac{1}{2}$, il cui quadrato è $\frac{1}{4}$). Avremo dunque $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + b = \frac{1}{4} + 156 = \frac{625}{4}$, facendone la somma (71). Estrattane poi la radice, sarà $x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}$. Dunque $x = \frac{1}{2} + \frac{25}{2}$.

Dunque $x = \frac{26}{2} = 13$. Di fatti $13 + 156 = 169$, quadrato di x, ossia di 13.

Problemi di 1.° grado.

Non sarà cosa inutile il trascrivere quì dei problemi da risolversi, per esercizio di chi studia. Ad ognuno di essi poi si troverà annessa la risposta, onde serva di lume nella respettiva soluzione.

Essendo interrogato un mercante, che vende del caffè, quanto lo abbia pagato, e quanto sia; risponde che vendendolo a 25 bajocchi la libbra, guadagna 100 scudi Romani: vendendolo poi 30 bajocchi, guadagna 160 scudi. Si cerca quante libbre sieno, e quanto costino? *R.* Sono 1200 libbre, ed importano 200 scudi romani.

Un padre, ed un figlio hanno in tutti due anni 100. Il figlio peraltro ne ha 30 meno del padre. Qual sarà l'età di ciascheduno? *R.* Il padre ha 65 anni, ed il figlio ne ha 35.

Tizio lascia la sua eredità ai figli da ripartirsi in questo modo. Il primogenito avrà mille ducati, e la

Digitized by Google

sesta parte del rimanente. Il secondo avrà duemila ducati, e la sesta parte di ciò che rimane: e con questo stesso ordine parteciperanno tutti gli altri figli. Diviso così l'asse ereditario, si trova, che ciascun figlio ha ricevuto una egual porzione. Si domanda qual sia il numero dei figli, e la quantità dell' asse paterno? *R.* L'asse è di 25000 ducati, e 5 è il numero dei figli.

In un terremoto nella Città di Catania caddero nella prima scossa la metà delle case, nella seconda ne cadde $\frac{1}{3}$, e nella terza ne cadde $\frac{1}{12}$, e ne rimasero in piedi 63. Si domanda quante case contenesse la Città? *R.* 756.

Un Elemosiniere vedendo alcuni poveri adunati insieme, risolve di dare ad essi tre soldi per ciascheduno, ed osserva, che glie ne mancano 9. Risolve di darne due a testa, e vede, che glie ne avanzano 2. Qual sarà il numero dei poveri, e dei soldi? *R.* I poveri sono 11, ed i soldi 24.

Trovare un numero, che diviso per 6, dia un quoto, a cui se si aggiunga il divisore, ed il dividendo, dia 69? *R.* Il numero cercato sarà 54.

Tizio lascia ai suoi figli 120000 scudi, e vuole, che si diano 12000 scudi ad ogni maschio, e 9000 ad ogni femmina. Ciò fatto, si trova esattamente esaurita tutta l'eredità. Ma se avesse ordinato, che si dassero 9000 a ciascun maschio, e 12000 ad ogni femmina; sarebbero avanzati 9000 scudi. Qual sarà il numero dei figli, e quale quello delle figlie? *R.* I figli sono 7, e le figlie 4.

Le tre Grazie avean colto nell' orto dell' Esperidi un egual numero di portogalli. Nell' uscire incontratesi colle nove Muse, loro ne donarono tanti, che ciascuna Grazia, e ciascuna Musa ne aveva un egual nume-

Digitized by Google

ro. Ma se ciascuna Musa avesse restituito a ciascuna delle Grazie due portogalli; allora ciascuna Grazia avrebbe avuto il doppio di ciascuna Musa. Qual sarà stato il numero dei portogalli? *R.* I portogalli cercati sono 120.

Tre mercanti hanno lucrato in un negozio 88 ducati con questa varietà, che il primo di essi ha lucrato 4 ducati più del secondo, ed il secondo 6 ducati più del terzo. Qual sarà il lucro di ognuno? *R.* Il primo ha lucrato 34 ducati; il secondo 30; ed il terzo 24.

Due viaggiatori partono da due luoghi distanti 120 leghe uno dall' altro, e tendono ad incontrarsi per istrada. Uno di essi fa 6 leghe al giorno, e l'altro ne fa 4. In qual giorno s' incontreranno insieme? *R.* L'incontro sarà nel duodecimo giorno.

Problema di 2.° *grado.*

Un Generale vuol formare dei suoi combattenti un battaglione quadrato: e scegliendone un certo numero per base del quadrato, ne avanzano 124. Ne aggiunge uno alla detta base, e ne mancano 129. Qual sarà il numero dei combattenti, e quello scelto per la base del quadrato? *R.* Il numero scelto per base del quadrato è 126, ed i combattenti sono 16000.

Trovare due numeri, che moltiplicati insieme diano 30, e sottrattone il minore dal maggiore, resti 1? *R.* Il maggiore sarà 6, ed il minore sarà 5.

Trovare un numero, il cui quadrato, più il settuplo del medesimo numero facciano 144. *R.* Il numero cercato sarà 9.

Trovare un numero, il cui quadrato insieme col decuplo della stessa sua radice sia eguale a 39. *R.* Il numero, che cercasi, sarà il 3.

Digitized by Google

Trovare un mumero x, che unito a 156 faccia il quadrato del richiesto x. *R*. Il numero x, di cui si va in traccia, sarà il 13.

Trovare un numero, il cui quadrato tre volte preso unitamente al sestuplo dello stesso numero faccia 144. *R*. Il numero cercato sarà 6.

Trovare due numeri x, y, nei quali dalla somma dei quadrati delle loro somme, e differenze sottratta la somma e differenza dei stessi numeri faccia 78: aggiunta poi al prodotto della somma per la differenza, la somma, e la differenza dei stessi numeri faccia 39. *R*. $x = 6$, ed $y = 3$: per lo che la somma $x + y$, sarà $= 6 + 3 = 9$, e la differenza $x - y$, sarà $= 6 - 3 = 3$.
Di fatti $9 \times 9 + 3 \times 3 = 90$, e $90 - 12 = 78$
ed anche $9 \times 3 + 9 + 3 = 27 + 12 = 39$
secondo le condizioni del problema.

Problemi Semi—determinati.

Trovare due numeri tali, che il quadrato del primo, aggiuntovi il secondo numero, eguagli il quadrato del secondo, aggiuntovi il primo numero. *R*. $1 = y + x$. Dal che si deduce, che due parti qualunque, in cui dividesi l'unità, soddisfano, e sciolgono il problema. Le parti possono essere, per esempio, $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

Tutti i problemi Semi—determinati coll'ammettere la condizione, che i numeri siano *interi*, e *positivi*, diventano in qualche modo determinati, e sono capaci di soluzione. Peraltro il risolvere tali problemi, esclude non già i numeri frazionarj, come si vede nel primo problema, ma soltanto gl'irrazionali: lo che esige, che le quantità incognite sieno talmente espresse, che si sfuggano l'estrazioni delle radici, come anche le quantità sorde (162), le quali si oppongono all'indole di tali problemi.

Digitized by Google

CAPO TERZO

Delle ragioni, proporzioni, e progressioni
Delle Quantità.

184. Fra due quantità può considerarsi il rapporto della differenza, che hanno tra di loro, in quanto che una supera, o è superata dall' altra, o pure il rapporto di contenere, o di esser contenuta. Il primo rapporto si chiama *ragione Aritmetica*, ed il secondo *ragione Geometrica*. Le dette quantità poi si chiamano *termini* della ragione, ed in particolare quello, che si riferisce, si chiama *antecedente*, e quello, a cui vien riferito, chiamasi *conseguente*. L'eguaglianza di due ragioni chiamasi *proporzione*. Parleremo ora delle ragioni, e proporzioni Geometriche, e quindi delleAritmetiche, posposte alle prime, per farne di seguito un'utile applicazione.

ARTICOLO I.

Delle ragioni, e proporzioni Geometriche.

185. La ragione geometrica, secondo l' esposto principio del numero precedente, consiste nel quoto, che risulta dall' antecedente diviso pel conseguente, o dal conseguente diviso per l'antecedente: il quale quoto chiamasi anche *esponente* della ragione. Per esempio, la ragione di 3 a 12 è il 4, che risulta dal 12 diviso per 3, e quella di 8 a 2 è parimente 4 nato dall' $\frac{8}{2}=4$.

La ragione geometrica risultante dal paragone di due quantità fra loro si marca per mezzo di due punti frapposti alle quantità medesime in questo modo 3 : 12, come pure 8 : 2. In queste due espressioni il 3, e l'8 si dicono *antecedenti*; il 12, e il 2 si dicono *conseguen-*

ti. Gli uni, e gli altri poi si chiamano in genere *termini* del rapporto.

186. Se in due ragioni geometriche, dividendosi l'antecedente pel conseguente, ovvero il conseguente per l'antecedente, ne risultino due quozienti eguali; le dette ragioni si dicono *dirette*. Onde 3 : 12, e 2 : 8 sono in ragion diretta: giacchè in ambedue queste ragioni i conseguenti divisi per i loro antecedenti danno uno stesso quoziente, che è 4. Similmente 12 : 3; e 8 : 2 sono anch' esse in ragion diretta: perchè gli antecedenti divisi per i di loro conseguenti danno un medesimo quoziente, che è lo stesso 4.

187. Che se poi, per avere due ragioni eguali, faccia d'uopo operare con ordine inverso, cioè in una ragione dividere l' antecedente pel conseguente, e nell' altra dividere il conseguente per l'antecedente, o viceversa; in tal caso i termini di siffatte ragioni si dicono essere in *ragione inversa*. Onde 12 : 3; e 2 : 8 sono in ragione inversa: giacchè per avere in questi due paragoni una stessa ragione, nel primo bisogna dividere il 12 pel suo conseguente 3, e nel secondo convien dividere il conseguente 8 per l' antecedente 2. Similmente 3 : 12; e 8 : 2 sono anch'esse in ragione inversa, come da sè stesso apparisce.

188. Peraltro in ambedue i casi si vede chiaramente, che le ragioni sono sempre le stesse, ed eguali in ambedue i termini dei due paragoni: giacchè le quantità dei quozienti si trovano sempre le stesse, ed eguali, tanto nei due paragoni per la ragion diretta, quanto negli altri due per la ragione inversa. Onde possiamo stabilire per teorema universale, che la ragione di due termini sarà sempre *eguale* alla ragione degli altri due, tutte le volte, che questi termini abbiano fra di loro un eguale rapporto.

Digitized by Google

189. Ogni frazione è una ragione geometrica: poichè in ogni frazione, dovendosi dividere il numeratore pel denominatore; il numeratore formerà un termine, ed il denominatore formerà l' altro della ragione. Onde $\frac{3}{12}$ possono formare questa ragione 3 : 12, oppure 12 : 3; ponendo cioè il numeratore per antecedente, ed il denominatore per conseguente della ragione: o viceversa.

190. Se l'antecedente sia maggiore del conseguente, e però si riferisca ad esso, come il tutto alla parte; la ragione chiamasi di *maggiore ineguaglianza*: come 12 : 3; e 8 : 2. Se accada il contrario; la ragione si dice di *minore ineguaglianza*: come 3: 12, ed anche 2: 8. Se poi i termini, che si riferiscono sono *irrazionali*, anche la ragione si dice *irrazionale*. Per esempio 3: 4, oppure 7: 11 esprimono una ragione irrazionale, che è quella, nella quale non si trovano parti *aliquote comuni*.

200. Poichè parti *aliquote*, come altrove si è detto, sono quelle, che prese alcune volte eguagliano il tutto (113): e si dicono *aliquote*, perchè hanno la stessa proprietà, e natura del quoto, che preso alquante volte eguaglia il dividendo, da cui nasce. Al contrario parti *aliquante* sono quelle, che prese quante volte si voglia non giungono mai ad eguagliare il tutto. Quindi nella ragione di 3: 12 il termine 3 è parte aliquota di 12: perchè preso quattro volte eguaglia il medesimo 12. Viceversa nella ragione irrazionale di 3 : 11, il 3 è parte aliquanta dell'11: perchè non giunge mai ad eguagliarlo.

201. Quando quattro termini di due ragioni sono in ragion diretta fra loro, costituiscono una *proporzione*, la quale può quindi definirsi: *l'eguaglianza delle ragioni, di quattro, o più termini disposti in ragion diretta gli uni dopo gli altri* (186). Onde 3: 12 : : 2 : 8

forma una proporzione geometrica: la quale scrivesi sempre, ponendo due punti fra il primo, e il secondo termine, e fra il terzo termine, ed il quarto: e ponendo nel mezzo sempre quattro punti con quell' ordine, che notasi nell'indicato esempio, il quale si legge così: 3 a 12; come 2 ad 8. Il primo, ed ultimo termine della proporzione si chiamano *estremi*, e gli altri due si dicono *medj*.

202. Se il conseguente di una ragione sia antecedente dell'altra, avremo la *proporzione continua*: e quello, che è stato conseguente insieme, ed antecedente, si chiama la *mezza proporzionale*. Onde 2 : 4 : : 4 : 8 è una proporzione continua, nella quale il 4 è la mezza proporzionale.

203. Continuandosi varj termini colle dette mezze proporzionali anche, se si voglia, in infinito; avremo la *progressione geometrica*, della quale parleremo in un' Articolo separatamente.

Della proprietà delle Ragioni Geometriche.

204. Essendosi osservato, che ogni frazione è una ragione geometrica; ne nasce, che una ragione geometrica punto non si varia, allorchè i due suoi termini sono moltiplicati, o divisi per uno stesso numero. Poichè se ogni ragione geometrica è una frazione (189), ne siegue per necessità, che come non variasi di valore la frazione, allorchè tanto il numeratore, che il denominatore sono moltiplicati, o divisi per uno stesso numero, mentre conservano sempre al loro tutto un rapporto, che in effetto esprime sempre lo stesso; così nè anche la ragione geometrica variasi nel valore, allorchè i suoi termini si moltiplicano, o si dividono per uno stesso numero. Laonde il rapporto di 3 : 12 è quel-

Digitized by Google

l'istesso di 6 : 24, che si ha moltiplicandosi i due termini per 2: ed è ancora quello stesso di 1 : 4, che si ha dividendosi i due termini per 3.

In forza di questa proprietà possono molto semplicizzarsi i rapporti geometrici. Per esempio, esaminando noi il rapporto di $4\frac{3}{5}$ a $6\frac{3}{4}$; lo troviamo lo stesso, che il rapporto di $\frac{23}{5}$ a $\frac{27}{4}$: lo stesso, che il rapporto di $\frac{92}{20}$ a $\frac{135}{20}$, riducendoli allo stesso denominatore: lo stesso finalmente, che il rapporto di 92 a 135, togliendo il denominatore comune: lo che è lo stesso, che moltiplicare i due termini del rapporto per uno stesso numero, che è 20.

205. Se una ragione si moltiplichi nei suoi respettivi termini con altri termini, aventi la medesima ragione; la ragione, che ne verrà, si chiama *ragion composta*. In particolare poi si chiama ragion *duplicata*, se i termini, che si moltiplicano sono due: se sono tre, si dice *triplicata*: e così di mano in mano avremo la ragion *quadrupla*, *quintupla*, *sestupla* ec. a tenore dei termini, che si moltiplicano, se sono cioè quattro, cinque, o sei ec.

ESEMPIO I.

2 : 4 :: 3 : 6
3 : 6 :: 6 : 12

Avremo la ragion duplicata in

6 : 24 :: 18 : 72.

ESEMPIO II.

2 : 4 :: 3 : 6
3 : 6 :: 6 : 12
4 : 8 :: 8 : 16

Avremo la ragion triplicata in

24 : 192 :: 144 1152

206. Essendo la ragione dei fattori = 2, si vede chiaramente nel primo esempio la ragione duplicata espressa col quadrato dell'esponente della ragione dei fattori; cioè (185) col quadrato di 2, che è 4: e nel secondo esempio la ragion triplicata si vede espressa col cubo dello stesso 2, che è 8: come si vede, dividendosi il conseguente per l'antecedente nelle proporzioni dei suddetti due esempj.

207. In una multiplicità di ragioni geometriche eguali la somma di tutti gli antecedenti starà alla somma di tutti i conseguenti; come il primo antecedente al primo conseguente. Onde se sieno le ragioni $a : aq :: b : bq :: c : cq$; avremo necessariamente $(a + b + c) : (a + b + c)\, q :: a : aq$. La formola medesima dimostra la verità di tutto questo. Ma meglio ancora si comprende nei numeri. Per esempio posto 32 : 16 : : 16 : 8 : : 8 : 4 : : 4 : 2; avremo 32 + 16 + 8 + 4 a 16 + 8 + 4 + 2; come 32 a 16: ossia 60: 30 :: 32: 16.

Della proprietà delle Proporzioni Geometriche.

208. La proprietà più bella, e più utile delle proporzioni geometriche è, che in ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi (201) è sempre eguale

al prodotto dei medj. Per esempio se sia $a : b :: c : d$; avremo $ad = bc$, ed in numeri se sia $2 : 4 :: 5 : 10$, avremo $2 \times 10 = 5 \times 4$. Ed eccone la ragione. In una proporzione due prodotti saranno sempre eguali fra di loro, se quante volte di più si prende il fattore più piccolo, tante volte di meno si prenda l' altro fattore più grande. Ma ciò accade nel nostro caso: come si vede nella proporzione espressa per numeri, comprendendosi nel 4 due volte il 2, come due volte il 5 ancora è contenuto nel 10: vale a dire, che il fattore 5, il quale è la metà del fattore 10, venendo preso due volte di più nel moltiplicarlo per 4, e due volte di meno prendendosi il fattore 10 nel moltiplicarlo per 2; quindi è, che questi due prodotti devono essere eguali fra loro. E siccome accade ciò in ogni proporzione geometrica; perciò possiamo conchiudere, che in ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi sarà sempre eguale a quello dei medj.

209. Siegue da ciò, che sciogliendosi un prodotto in quattro fattori, due di quelli, che formano il prodotto possono porsi per medj, e gli altri due per estremi: o vicendevolmente, ed avremo sempre la proporzione geometrica. Poichè essendovi, come si suppone, l'eguaglianza fra i prodotti; se nella prima coppia dei fattori, il più piccolo, a cagion di esempio, sia il duplo, o triplo del più piccolo dell'altra coppia; anche il più grande della prima coppia convien, che sia la metà, o la terza parte del più grande dell'altra coppia, o vicendevolmente: e da ciò noi avremo la proporzione, come vedesi in $2 ; 4 ;; 4 : 8$, che nasce dal prodotto 16 sciolto in quattro fattori.

Esprimiamo tutto con una formola generale. Sia la ragion comune di due quantità $= q$. Potranno esse rappresentarsi con $a : aq$; e due altre quantità aventi

Digitized by Google

il medesimo rapporto potranno rappresentarsi con l'espressione di $b : bq$. Dunque qualunque proporzione sarà rappresentata da questa formola generale $a : aq :: b : bq$. In essa si vede ocularmente la eguaglianza dei prodotti, se si moltiplichino fra di loro i medj, e gli estremi: giacchè in ambedue i casi avremo abq: e sciogliendo questo prodotto nei varj suoi fattori, e collocandone due per medj, e due per estremi; avremo noi sempre la proporzione $a : aq :: b : bq$.

210. Dai medesimi principj si rileva ancora, che ogni proporzione può somministrarci una equazione: e spesso per intavolare un problema, giova il formare una proporzione, e quindi trovare l'equazione.

Dalle medesime vedute si deduce, come debba trovarsi un termine incognito in una proporzione, dati che sieno gli altri tre: onde può essere

$a : b :: c : x$ nel primo caso $x = \frac{bc}{a}$

$a : b :: x : c$ nel secondo caso $x = \frac{ac}{b}$

$a : x :: b : c$ nel terzo caso $x = \frac{ac}{b}$

$x : a :: b : c$ nel quarto caso $x = \frac{ab}{c}$

211. Se si cerchi la mezza proporzionale, noi la troveremo, estraendo la radice quadrata dal prodotto degli estremi. Di fatti, se sia $a : x :: x : b$; noi avremo $ab = x^2$, ed avremo perciò $x = \sqrt[2]{ab}$. Così se sia in numeri $2 : x :: x : 8$, noi avremo $x^2 = 16$; ed in conseguenza $x = 4$. Onde sarà $2 : 4 :: 4 . 8$.

212. Avendo bene inteso, che sciogliendosi un prodotto in varj fattori, e ponendosi una coppia di essi

per estremi, ed un' altra coppia per medj, ne nascerà necessariamente una proporzione geometrica; quante volte questa conservi l'uguaglianza dei prodotti dei medj, e degli estremi, rimarrà sempre la proporzione. Onde se si facciano tutte le seguenti mutazioni, rimarrà sempre la proporzione: attesa la prima eguaglianza di $ad : bc$, dalla quale nascono tutte le otto formole, che sieguono: vale a dire

In Algebra.	*In Numeri.*
$a : b :: c : d$	$2 : 4 :: 3 : 6$
$a : c :: b : b$	$2 : 3 :: 4 : 6$
$b : a :: d : c$	$4 : 2 :: 6 : 3$
$b : d :: a : c$	$4 : 6 :: 2 : 3$
$c : a :: d : b$	$3 : 2 :: 6 : 4$
$c : d :: a : b$	$3 : 6 :: 2 : 4$
$d : b :: c : a$	$6 : 4 :: 3 : 2$
$d : c :: b : a$	$6 : 3 :: 4 : 2$

213. Se si facciano delle mutazioni, per mezzo di somma, o di sottrazione, rimanendo sempre la medesima eguaglianza dei prodotti; rimarrà anche la proporzione fra le quantità sommate, o sottratte. Posto dunque per prima proposizione fondamentale

$a : b :: c : d$, ed in numeri $2 : 4 :: 3 : 6$;

Avremo

$a \pm b : b :: c \pm d : d$. ec. $2 \pm 4 : 4 :: 3 \pm 6 : 6$;
$a : a \pm b :: c : c \pm d$. ec. $2 : 2 \pm 4 :: 3 : 3 \pm 6$.

214. Se in due proporzioni i termini respettivi si

Digitized by Google

moltiplichino, o si dividano fra di loro; rimane sempre la proporzione. Onde supposto, per esempio,

$a : b :: c : d$, ed in numeri $4 : 8 :: 8 : 16$

$m : n :: p : q$ . . . . $2 : 4 :: 4 : 8$;

Moltiplicando, avremo

$am : bn :: cp : dq$ . . . . $8 : 32 :: 32 : 128$;

Dividendo, avremo

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q} \; \ldots\ldots \; \frac{4}{2} : \frac{8}{4} :: \frac{8}{4} : \frac{16}{8}.$$

215. Nello stesso modo se tutti i termini di una proporzione geometrica si moltiplichino per uno stesso numero, conserveranno sempre la proporzione medesima. Onde per questo principio avremo

$2 : 4 :: 4 : 8$; e moltiplicando per 2, sarà $4 : 8 :: 8 : 16$.

$a : b :: c : d$; elevando ad n, sarà $a^n : b^n :: c^n : d^n$.

Da ciò si deduce, che tanto gli esponenti indicanti la potenza seconda, terza, quarta ec. dei termini di una proporzione geometrica, quanto le radici di queste potenze di tali termini sono in proporzione fra di loro.

216. Se in più proporzioni geometriche si moltiplichino gli antecedenti fra di loro, e i conseguenti parimente fra di loro; i prodotti saranno in *ragion composta* coi loro respettivi antecedenti, e conseguenti: e si diranno in *ragion duplicata*, se le proporzioni moltiplicate erano due: *triplicata*, se le proporzioni erano

tre: e così in appresso. Potrà servire di esempio quello stesso, che è nel numero 205.

ARTICOLO II.

Delle ragioni, e proporzioni Aritmetiche.

217. Secondo il principio esposto nel numero 184 il rapporto, ossia ragione aritmetica consiste nella differenza, che passa fra due quantità, che si chiamano *antecedente*, e *conseguente* della ragione. Per esempio la ragione aritmetica di 3 *a* 7 è il 4, che risulta dal 3 sottratto dal 7.

La ragione aritmetica risultante da due quantità paragonate fra di loro suol marcarsi per mezzo di un punto, che si mette fra le medesime quantità così 3. 7., nella quale il 3 si dice *antecedente*, ed il 7 si dice *conseguente*: e tutti due si chiamano in genere *termini* della ragione.

218. Allorchè un'antecedente differisce dal sno conseguente per quella stessa quantità, per cui un'altro antecedente differisce dal suo conseguente: avremo la *proporzione aritmetica*. Una tal proporzione si scrive così 3. 5: 6. 8; mettendo un sol punto fra i due primi, e i due ultimi termini, e due punti nel mezzo dei quattro: e si legge così; 3 sta a 5; come 6 a 8. Il 3, e l'8 ossia il primo termine, e l'ultimo della proporzione si dicono *estremi*, e gli altri due, che sono nel mezzo, si chiamano *medj*.

219. Se il conseguente di una ragione sia tosto antecedente dell'altra; avremo la *proporzione Aritmetica continua*, e quello che è stato conseguente, ed antecedente insieme, si chiama la *mezza proporzionale Aritmetica*: Onde questi quattro termini 3 . 5 : 5 . 7 co-

stituiscono una proporzione Aritmetica continua nella quale il 5 è la mezza proporzionale Aritmetica.

220. Continuandosi varj termini colle dette mezze proporzionali, in infinito ancora, se così si voglia; avremo la *progressione Aritmetica*, la quale costituirà un'Articolo a parte nel proseguimento di questo Capo.

Della proprietà delle ragioni Aritmetiche.

221. Allorchè in due ragioni osserviamo, che la differenza del primo termine dal secondo di una ragione è quella stessa, che ha il primo termine dal secondo dell' altra ragione; queste due ragioni saranno fra loro eguali. Così la differenza fra 3, e 5 essendo quella stessa, che sta fra 7, e 9; rimane chiaro, che la ragione aritmetica di 3 a 5 è quella stessa, che sta fra 7, e 9. Sicchè l'eguaglianza delle differenze forma l'eguaglianza delle ragioni aritmetiche.

Da ciò ne siegue, che la ragione aritmetica non varia punto di valore, allorchè ai suoi termini si aggiunga, o si sottragga uno stesso numero: giacchè come rimane sempre la stessa differenza; così la ragione ancora sarà sempre la stessa.

Della proprietà delle proporzioni aritmetiche.

222. Qualunque proporzione aritmetica può rappresentarsi con questa formola generale di $a \,.\, a \pm d : b \,.\, b \pm d$. Poichè nella proporzione aritmetica dovendo essere le ragioni eguali, la differenza deve esprimersi con una lettera istessa, come d. Laonde se a, e b notano in genere gli antecedenti di due ragioni aritmetiche eguali; i loro conseguenti non possono essere altri fuori di $a \pm d$; e $b \pm d$. Poichè se a è antecedente,

Digitized by Google

esso o è maggiore, o è minore del suo conseguente. Se a è maggiore del suo conseguente, lo sorpasserà per una quantità, che possiamo chiamarla d. Dunque in tal caso il conseguente sarà $a - d$. Se poi a è minore del suo conseguente, allora sarà da esso superata per la quantità, che chiamiamo d. Dunque in questo caso il conseguente sarà $a + d$. Dunque in ogni ragione aritmetica il conseguente è eguale all' antecedente più, o meno la loro differenza. Dunque ogni proporzione aritmetica può rappresentarsi per $a.\ a \pm d : b.\ b \pm d$.

223. In questa formola si scorge a colpo d'occhio la proprietà notissima delle proporzioni aritmetiche, che la somma degli estremi è sempre eguale alla somma dei medj. Di fatti posto $a.\ a \pm d : b.\ b \pm d$, avremo $a + b + d = a + b + d$; ed in numeri posto $3.\ 5 : 7.\ 9$, avremo $3 + 9 = 5 + 7$, ossia $12 = 12$.

224. Da ciò si deduce 1.° la maniera di trovare qualsivoglia termine ignoto nella proporzione aritmetica, se sieno noti gli altri tre: avremo cioè il termine cercato eguale sempre a ciò, che manca al termine noto per far sì, che il termine noto unito all' incognito dia una somma eguale alla somma degli altri due; dovendo sempre essere la somma dei medj eguale alla somma degli estremi.

Per esempio, se in una proporzione aritmetica, dati i tre primi termini, si cerchi il quarto, come se dato $a.\ b : c.\ x$, si cerchi questo x, noi lo troveremo e in Algebra, e in numeri così $a + x = b + c$. Dunque $x = b + c - a$; ed in numeri $2 + x = 3 + 4$. Dunque $x = 3 + 4 - 2$. Dunque $x = 5$.

225. Si deduce ancora in 2.° luogo, che se debbasi trovare la *mezza proporzionale* aritmetica fra a, e d, noi l'avremo in $\frac{a+d}{2}$. Poichè dovendo essere

la somma degli estremi eguale alla somma dei medj; diremo, che $a + d = 2x$. Dunque $x = \frac{a+d}{2}$. Ed in numeri, fissati che sieno per estremi 2, e 6, e per medio incognito x, sarà $2x = 2 + 6$. Dunque $x = \frac{2+6}{2} = 4$. Il 4 dunque sarà la mezza proporzionale cercata, colla quale diremo 2 : 4 : 4 : 6.

ARTICOLO III.

Delle Progressioni Geometriche.

226. La progressione geometrica è una serie di termini così fra loro disposti, che ognuno di essi contiene il termine, che lo precede, o è contenuto da esso uno stesso numero di volte. Per esempio 1 : 2 : : 2 : 4 : : 4 : 8 : : 8 : 16 : : 16 : 32 ci presentano una progressione geometrica, la quale suole scriversi in compendio così $\div\!\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32.

Si vede in questa progressione, che ciascun termine contiene quello, che lo precede uno stesso numero di volte. Questo numero di volte costituisce la *ragione* della progressione geometrica, la cui caratteristica, ossia segno di distinzione è questo $\div\!\!\div$, il quale indica, che la progressione geometrica si debba leggere così: 1 *a* 2; come 2 *a* 4; come 4 *a* 8; come 8 *a* 16; come 16 *a* 32: e così in seguito.

227. La progressione geometrica può essere *crescente*, o *decrescente*. La crescente si ha, quando i termini procedono dal meno al più, crescendo di continuo, come nell' accennato esempio $\div\!\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32. La decrescente si ha, quando i termini procedono dal più al meno, decrescendo costantemente,

come ∺ 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : 0 : — 1 : 2 : — 4 : — 8 : — 16 : — 32, e così in infinito, decrescendo costantemente per un' istessa quantità.

Dal che si scorge, che ogni progressione geometrica ha due braccia, uno crescente, e l' altro decrescente, che vanno tutti due a perdersi in senso contrario nell' infinito. Si scorge cioè, che la progressione geometrica, non meno che l'aritmetica, come a suo luogo vedremo, non ha principio, nè fine, e noi non possiamo conoscere, sennonchè un punto preso nel mezzo. Questa è la figura del tempo paragonato alla eternità.

228. Esaminandosi la natura della progressione geometrica, due cose specialmente rimarchiamo. 1.° Che gli esponenti della ragione comune nelle progressioni geometriche rappresentano una progressione aritmetica, nel mentre che i termini sono in progressione geometrica. Quando si sarà spiegata la natura della progressione aritmetica (234), si capirà bene questa verità.

La 2.ª cosa, che si rileva dalla natura della progressione geometrica, si è, che in essa il secondo termine è composto del primo moltiplicato per la ragione comune: il terzo è composto del primo moltiplicato pel quadrato della ragione comune: il quarto è composto del primo moltiplicato pel cubo della ragione comune: il quinto è composto del primo moltiplicato per la quarta potenza della ragione comune: il sesto è composto del primo moltiplicato per la quinta potenza della ragione comune. In una parola troviamo, che qualunque termine è composto del primo termine moltiplicato per quella potenza della ragione comune, che nota il numero dei termini, che lo precedono.

229. Questa seconda riflessione ci somministra la maniera di trovare i medj proporzionali, che vogliono

inserirsi fra due dati numeri: come per esempio se fra 2, e 32 vogliano inserirsi tre medj proporzionali.

Tutta la questione riducesi a rinvenire la ragione, che deve dominare nella progressione, e questa ragione si rinviene così. Siccome si sa che il 32 è composto del primo termine, che è 2, moltiplicato per la quarta potenza della ragione; perciò io divido subito il 32 per 2, e dal quoto 16 estraggo la radice della quarta potenza, che sarà 2. Dunque dirò, che il 2 è la ragione cercata. Dunque il secondo termine della progressione indicata sarà $2 \times 2 = 4$: dunque il terzo sarà 2×4, seconda potenza della ragione: il quarto sarà 2×8, terza potenza della ragione: dunque la progressione sarà $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$.

Dunque diremo per principio generale, che per inserire fra due dati termini dei medj proporzionali, convien dividere il più grande per lo più piccolo dei dati termini, ed estrarre dal quoto di una tal divisione la radice di quella potenza, che marca il numero dei medj da inserirsi più uno.

230. La proprietà notissima della progressione geometrica è quella, che il prodotto degli estremi è sempre eguale al prodotto dei medj: o al prodotto di quelli, che distano egualmente dai medj: o al prodotto del medio moltiplicato in se stesso, nella circostanza, che sia essa composta di un' inegual numero di termini. Per esempio nella progressione $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$; avremo 1×64 eguale a 2×32, eguale a 4×16, eguale a 8×8.

231. Dalle cose fin quì dette si può sciogliere un bellissimo problema, quale è quello di trovare la somma di una progressione geometrica crescente, o decrescente, ancorchè avesse termini infiniti. Si rifletta, che tutti i termini di una progressione geometrica, trattone

l'ultimo, possono considerarsi come antecedenti: e che tutti i termini della stessa progressione, eccettuato il primo, possono rappresentarsi come conseguenti.

Si è poi veduto (207), che in una serie di ragioni eguali la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti; come il primo antecedente, al primo conseguente: ossia come il primo termine al secondo. Dunque se nel nostro caso, o formola si chiami s la detta somma cercata, ed ω l'ultimo termine della progressione, avremo in tal caso $s - \omega : s - a :: a : aq$; supponendo la formola generale della progressione geometrica così $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ . \ . \ . \ aq^{n-1}$. Se è dunque $s - \omega : s - a :: a : aq$; ne nasce, che moltiplicando gli estremi, ed i medj fra loro, avremo $aqs - aq\omega = as - a^2$: e distruggendone l'$a$, avremo (134) $qs - q\omega = s - a$: e riducendo per trasposizione (174), avremo $qs - s = q\omega - a$: e finalmente dividendo (176), avremo $s = \frac{q\omega - a}{q - 1}$.

PROSPETTO

$$s - \omega : s - a :: a : aq \ . \ d^e$$

$$aqs - aq\omega = as - a^2 \ . \ d^e$$

$$qs - q\omega = s - a \ . \ d^e$$

$$qs - s = q\omega - a \ . \ d^e$$

$$s = \frac{q\omega - a}{q - 1}.$$

Dati dunque il primo, e l'ultimo termine, e la ragione comune di una progressione geometrica; potrà fa-

cilmente trovarsi la somma di tutta la progressione medesima. Eccone un esempio. Sia la progressione $\div\!\div$ 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561. Io moltiplico l'ultimo termine di questa progressione 6561 per 3, ragione comune; e dal prodotto 19683 sottraggo il primo termine 3: e diviso il residuo 19680 per 2, che è la ragione comune meno 1, troverò nel quoto 9840 la somma dei termini, che cercavasi. Di fatto $\div\!\div$ 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 = 9840.

232. Si osservi ancora, che qualunque termine di una progressione geometrica è eguale al primo termine moltiplicato per la ragione comune, la quale abbia per esponente il numero dei termini, che precedono il medesimo termine, che cercasi: come meglio si è analizzato nel numero 228. Sia la progressione $\div\!\div$ 3 : 9 : 27 : 81 : 243, di cui si cerchi il quinto termine 243. Essendo la ragione comune 3, la sua quarta potenza corrispondente al numero dei termini, che precedono il 243 nell' accennata progressione, verrà così: $3 \times 3 = 9 \times 3 = 27 \times 3 = 81$. Dunque la ragione comune, che ha per esponente il numero dei termini, che precedono il quinto termine cercato, sarà nel nostro caso 81, per il quale se si moltiplichi il primo termine 3 della esposta progressione; avremo il 243, che è il quinto termine cercato.

233. Da ciò si capirà, che se cercasi l'ultimo termine di una progressione geometrica, ne nasce questa formola $\omega = aq^{n-1}$. Questa formola unita alla prima ossia all' antecedente $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ somministra i lumi per iscioglierc questo problema universale

Sia il primo termine $= a$;
L'ultimo termine sia $= \omega$;
Il numero dei termini $= n$;
La somma dei termini $= s$;
La ragione comune $= q$.

Date tre di queste quantità, si potranno sempre trovare le altre due, e stabilire delle formole universali, per adattarle alla soluzione dei problemi relativi alla serie geometrica. Queste formole sono 20, e sono le seguenti. Ma fa d'uopo avvertire, che, per la piena intelligenza di tutti i risultati delle medesime, bisognerebbe aver letta prima la Teoria dei Logaritmi, e quella delle Equazioni dei gradi superiori al secondo da noi spiegato. Nelle Formole il Logaritmo è indicato colla lettera L.

	Date	Si ha	FORMOLE
1ª	ω, s, n		$(s-a)a^{\frac{1}{n-1}} = (s-\omega)\omega^{\frac{1}{n-1}}$
2ª	ω, q, n	a	$a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$
3ª	ω, q, s		$a = \omega q - sq + s$
4ª	q, n, s		$a = s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$
5ª	a, q, n		$\omega = aq^{n-1}$
6ª	a, s, n		$(s-\omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)a^{\frac{1}{n-1}}$
7ª	a, q, s	ω	$\omega = s - \frac{(s-a)}{q}$
8ª	q, n, s		$\omega = sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$
9ª	a, ω, n		$q = \sqrt[n.1]{\frac{\omega}{a}}$
10ª	a, n, s	q	$q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0$
11ª	a, ω, s		$q = \frac{s-a}{s-\omega}$
12ª	n, ω, s		$q^n - \frac{s}{s-\omega}q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$

	Date	Si ha	FORMOLE
13ª	a, ω, q		$n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}$
14ª	a, ω, s	n	$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}$
15ª	a, q, s		$n = \frac{L(sq - s + a) - La}{Lq}$
16ª	ω, q, s		$n = 1 - \frac{L\omega - L(\omega q - sq + s)}{Lq}$
17ª	a, ω, n		$s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
18ª	a, q, n	s	$s = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$
19ª	a, ω, q		$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$
20ª	ω, n, q		$s = \frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

Le venti Formole specificate nella esposta Tavola fanno sì, che date in una Progressione Geometrica tre delle cinque quantità di sopra indicate a primo termine, ω ultimo, n numero dei termini, s loro somma, q loro quoziente ossia ragion comune dei termini, fanno sì, dissi, che, dati tre dei detti termini, si trovino sempre a colpo d'occhio gli altri due indicati nella rispettiva Formola: ed eccone gli esempj in questi Problemi.

1.° La popolazione di un Paese ben costumato, libero, ed ubertoso contava diecimila anime: in capo a quattro anni è giunta a 14641 anime. Con quale progressione si è fatto questo aumento?

R. Qui si hanno tre termini, $a=10000$, $\omega=14641$,

ed $n = 5$, perchè al principiare dei quattro anni già si ha il primo termine 10000. Si hanno dunque tre termini a, ω, n, ai quali nella Formola 9ª corrisponde

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = \sqrt[4]{\frac{14641}{10000}} = \frac{11}{10}$$ quoziente ossia ragion comune della Progressione. Dunque le 10000 anime divennero sul fine del primo anno 11000, ed in conseguenza l'aumento annuale fu di $\frac{1}{10}$.

2.° Un litigante ostinato ha speso in varie liti 121000 Lire. La prima lite gl' importò 1000 Lire, l' ultima 81000 Lire, e le spese delle altre liti sono medie proporzionali tra questi due estremi: si cerca il numero delle liti perdute.

R. Noi abbiamo tre termini, $a = 1000$ Lire, $\omega = 81000$ Lire, $s = 121000$ Lire, ai quali tre termini a, ω, s nella Formola 14ª corrispondono

$$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)} = 1 + \frac{L81000 - L1000}{L120000 - L40000} =$$

$$1 + \frac{L\left(\frac{81000}{1000}\right)}{L\left(\frac{120000}{40000}\right)} = 1 + \frac{L\,81}{L\,3} = 1 + \frac{4L3}{L3} = 5,$$ numero delle liti perdute.

3.° Un Dissipatore ha consumato in cinque mesi quanto aveva ereditato, quadruplicando in ogni mese la spesa, che nel primo fu di 300 zecchini. Si cerca il patrimonio da lui ereditato.

R. Noi abbiamo tre termini, $a = 300$ zecchini sciupati nel primo mese, $q = 4$ della spesa quadruplicata in ogni mese, ed $n = 5$ numero dei cinque mesi del

consumo della Eredità. Abbiamo dunque a, q, n, a cui nella Formola 18^a della Tavola corrisponde $s=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$ $=300\left(\frac{4^5-1}{3}\right)=100.1023=102300$ zecchini che costituivano l'eredità dissipata in cinque mesi.

4.° Si cerca quanto importi un Mausolèo alto 18 palmi, ragguagliandone il prezzo a due lire per ogni palmo in ragione di progressione geometrica, che vengono ad essere 2 lire pel primo palmo, 4 pel secondo, 8 pel terzo, o così in seguito.

Per isciogliere questo problema, bisogna 1.° trovare il diciottesimo termine della progressione geometrica, che abbia 2 per primo termine, e 2 ancora per la ragione comune: 2.° trovare la somma di tutti i termini della progressione.

Si sa, che il diciottesimo termine cercato, deve essere eguale al primo, che è 2 moltiplicato per la ragione comune 2, avente per esponente il numero dei termini, che precedono il diciottesimo (232): moltiplicato cioè per la 17^a potenza di 2, ragione comune. Ora la 17^a potenza di 2 è 131072, cho moltiplicato per il primo termine 2 dà 262144. Dunque la progressione geometrica, di cui ragionasi, ha per primo termine il 2, e per diciottesimo termine, ossia per termine ultimo di essa progressione 262144.

Avendo ora noi il primo, e l'ultimo termine della progressione, e la ragione comune di essa; con facilità troveremo la somma di tutti i termini della medesima progressione. Poichè secondo la formola generale (231) la somma suddetta deve essere eguale all'ultimo termine moltiplicato per la ragione comune, e divisone il prodotto per la ragione comune meno 1, dopo però che

Digitized by Google

esso prodotto sarà stato scemato del primo termine. Diremo noi dunque così:

$$262144 \times 2 = 524288 - 2 = 524286.$$

$$d^e \ \frac{524286}{2-1} = 524286.$$

Tutto l'importo dunque del Mausolèo ascenderà a 524286 lire, come potrà ognuno verificarlo meccanicamente, sommando tutti i prezzi particolari di ciascun palmo di esso Mausolèo, dopo di aver formato la serie da sommarsi secondo l'enunciazione del problema: come farò in pratica osservare.

Per dare un'idea degli accrescimenti rapidi, che riceve la somma di una progressione geometrica in capo ad un numero, anche mediocre, di termini, eccone un' esempio sulla progressione dupla, benchè il cammino di essa sia uno dei più lenti.

L' inventore del giuoco degli Scacchi, fu pregato dal suo Sovrano, nel ricevere in dono la Scacchiera, a chiedergli una ricompensa proporzionata alla bellezza della sua invenzione. Dopo molte negative, finalmente l' inventore impegnato a mortificare ingegnosamente il Re, disse, che gli si dasse un granello di fromento per la prima casa del suo Scacchiere, 2 per la 2ª casa, 4 per la 3ª, e così raddoppiando fino alla 64ª casa.

La domanda sembrò da principio a tutta la Corte un vero nulla, e si rise su di essa. Ma, fatti quindi i calcoli, fu trovata ineseguibile, ed eccedente le ricchezze fromentarie di tutto quel Regno assai grande.

Digitized by Google

ARTICOLO IV.

Delle Progressioni Aritmetiche.

234. La progressione aritmetica è una serie di termini, ciascuno dei quali supera il suo antecedente, o è superato da esso per una medesima quantità: come ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. ec.

Il distintivo della progressione aritmetica è il segno appostovi ÷, il quale indica, che la progressione si deve legger così: 1 a 3; come 3 a 5; come 5 a 7; come 7 a 9; come 9 a 11; come 11 a 13: e così in infinito.

Si scorge ocularmente nell'accennato esempio, che la differenza di un termine dall'altro della progressione è sempre la stessa in tutti i termini. Ora questa differenza è ciò, che chiamasi *ragione comune* della progressione aritmetica continua.

235. La progressione aritmetica può essere *crescente*, o *decrescente*. Si dice crescente, allorchè i termini vanno dal meno al più; aumentandosi costantemente sempre per una stessa quantità: come ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. La decrescente si ha, quando i termini vanno dal più al meno; scemandosi costantemente sempre per una stessa quantità: come ÷ 9. 7. 5. 3. 1. 0. — 1. — 3. — 5. — 7. — 9. ec.

È chiaro, che, prosegnendo innanzi coi termini di questa doppia specie di progressione aritmetica; anderemo a perderci all'infinito: come si è appunto osservato accadere nella progressione geometrica ancora (227).

236. Facendosi attenzione alla natura della progressione aritmetica continua; si scorge evidentemente, che l'eguaglianza delle differenze di un termine dall'altro è ciò, che costituisce la progressione medesima: e ciascun termine differisce dal suo antecedente per la sola

differenza, che ha col medesimo, ed è composto del primo termine, e di tante differenze, o ragioni, quanti sono i termini, che lo precedono. Quindi si deduce, che ogni progressione aritmetica tanto crescente, che decrescente può rappresentarsi con questa formola generale $\div a.\ a \pm d.\ a \pm 2d.\ a \pm 3d.\ a \pm d.\ (n-1)$.

237. Si vede apertamente, che la somma degli estremi è uguale alla somma dei medj: come anche alla somma di due altri termini, che distano egualmente dai medj: o al doppio del medio, se la progressione è composta di termini dispari nel numero. Anche nella progressione aritmetica espressa in numeri si vede con egual chiarezza siffatta proprietà. Di fatti nella progressione $\div 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15$ la somma degli estremi $3+15$, è eguale a $5+13$; a $7+11$; ed anche al doppio del termine medio 9.

238. Da quanto si è detto nel numero 236 si deduce, che se in una progressione aritmetica si abbia a, d, n, cioè il primo termine, la differenza ossia ragion comune, e il numero dei termini; potrà sempre trovarsi qualunque termine si voglia della medesima progressione. Per esempio se cercasi il sesto termine della progressione; l'avremo noi in $a+d\times5$: per essere la formola generale $a \pm d\ (n-1)$, e per essere nel nostro caso speciale $n=6$.

La ragione di ciò si è: perchè essendo ciascun termine della progressione aritmetica continua composto del primo termine, e di tante ragioni ossia differenze comuni, quanti sono i termini, che lo precedono; quindi il sesto termine da noi cercato dovrà essere composto del primo termine, e di 5 differenze o ragioni, come si è detto. Onde data in numeri la progressione $\div 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13$, per avere il sesto termine, che è 13; prenderemo l' aggregato del $3+2\times5=13$,

ossia il primo termine più la differenza o ragion comune moltiplicata questa pel numero dei termini, che precedono il sesto.

239. Se nella progressione aritmetica pongasi ω per il termine maggiore, vale a dire per ultimo termine nella progressione aritmetica crescente, e per primo nella decrescente; nasceranno queste due formole generali $s = (\omega + a)\ \frac{n}{2}$, ossia $s = \frac{\omega n + an}{2}$; ed anche $s = n$ moltiplicato pel medio: vale a dire, che se la progressione aritmetica sia composta di termini pari nel numero, la somma di tutti i termini è eguale all' ultimo moltiplicato pel numero dei termini diviso per 2, più il primo termine moltiplicato per lo stesso numero dei termini diviso parimente per 2. Se poi la progressione ha un numero disparo di termini, la somma di tutti i termini sarà eguale al medio moltiplicato pel numero dei termini: cosicchè, se il medio si chiami m, avremo la 1ª formola come si è indicata $s = \frac{\omega n + an}{2}$; e la 2ª così $s = mn$.

Per comprenderne la ragione, si analizzi questa progressione $\div\ a.\ a \pm d.\ a \pm 2d.\ a \pm 3d.\ a \pm 4d.\ a \pm 5d.\ a \pm 6d.$ Se se ne faccia la somma, avrassi $7a \pm 21d$. Ma moltiplicato per 7, numero dei termini, il primo, e l'ultimo termine della medesima progressione separatamente, e divisine i due prodotti per 2, abbiamo in fine gli stessi indicati $7a \pm 21d$. Dunque la prima formola è vera, e concorda coll'analisi. Lo stesso raziocinio vale per la 2ª ancora.

Premesse queste teorie, potranno sciogliersi tutti i problemi relativi alle progressioni aritmetiche con assai facilità. Eccone la maniera coi casi relativi.

Digitized by Google

PROBLEMA I.

240. Dati, che sieno a ed ω inserire i medj proporzionali, che quì chiamiamo m: come anche a indica il primo termine, ω l'ultimo, n il loro numero, e d la differenza, ossia ragione comune.

Si sa in forza del numero 236, essere $\omega - a = d \times n - 1$. In questo caso sarà $n - 1 = m + 1$. Dunque sostituendo (177), avremo $\omega - a = dm + d$. Dunque dividendo (176), avremo $d = \frac{\omega - a}{m + 1}$: che è la differenza, ossia ragione comune della progressione aritmetica continua.

Applicando la formola ad un caso particolare, come sarebbe se vogliansi frapporre 6 termini in progressione aritmetica continua fra 4, e 32; avremo $\omega = 32$; $a = 4$; $m = 6$. Sarà dunque $d = \frac{32 - 4}{6 + 1}$. Dunque $d = 4$. Dunque la progressione sarà $\div$ 4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32: ed ecco sei termini in progressione aritmetica fra gli estremi 4, e 32: come cercavasi.

Si capirà facilmente, che l'accennata formola di $\omega - a = d \times n - 1$, ossia $\omega - a = d \times n - d$, che è la medesima cosa, è stata ricavata dalla formola generale (236) della progressione aritmetica, in cui si vede, che la differenza fra il primo, ed ultimo termine di essa progressione è uguale alla differenza comune moltiplicata per il numero dei termini di tutta la progressione meno 1. Di fatti vediamo realmente, che $\omega - a = d(n - 1) = d(n - 1)$.

Si capirà ancora, che $n - 1$ dovrà corrispondere ad $m + 1$. Poichè n esprime tutti i termini della progressione, ed m tutti i medj proporzionali. Ora i medj

proporzionali sono quelli, che stanno fra il primo, ed ultimo termine della progressione. Dunque tutti i termini della progressione, compresi cioè il primo, ed ultimo termine ancora, sono eguali ad $m + 2$. Dunque $m + 2 = n$; ed in conseguenza $n - 1 = m + 1$.

L'indicata formola di questo primo problema resta certamente provata abbastanza, dopo queste riflessioni. Peraltro chi ne desiderasse una più minuta analisi, potrà esaminare la cosa così. Secondo il principio esposto di sopra (236) il più grande dei due dati numeri, fra i quali devono inserirsi i medj proporzionali, dovendo essere l'ultimo termine della progressione; sarà composto del primo termine, che viene ad essere il più piccolo di essi dati, e di tante ragioni, quanti sono i termini, che lo precedono. Dunque se io dal più grande dei due dati numeri sottraggo il più piccolo, il resto sarà la somma di tutte le ragioni, quanti sono i termini, che precedono il grande: sarà cioè il prodotto della ragione medesima moltiplicata pel numero dei termini, che precedono il grande. Dunque se questo resto, ossia prodotto della ragione si divida pel numero dei termini, che devono precedere il più grande, si avrà allora la ragione o differenza comune.

Dopo ciò, riflettendosi, che il numero dei termini, che devono precedere il più grande, sorpassa di una unità il numero dei medj da inserirsi fra i due dati numeri; rimarrà chiaro, che per inserire questi medj proporzionali, deve sottrarsi il più piccolo dal più grande dei due dati numeri, e dividersene la differenza pel numero dei medj più uno, a norma dell'indicata formola, ed il quoto ci darà la differenza o ragione comune, che deve dominare in tutta la progressione, che se ne deve costruire.

Laonde se fra 3, e 21 vogliano inserirsi otto medj

Digitized by Google

proporzionali, io sottraggo dal 21 il 3, e quindi divido il resto 18 per 8 + 1. Il quoto 2 sarà la ragione comune ossia la differenza comune della progressione cercata, la quale verrà così ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. Ed ecco inseriti fra 3, e 21 otto medj proporzionali a norma della prescritta formola, che resta dopo tutto ciò provatissima, e sommamente chiara.

PROBLEMA II.

241. In ogni progressione aritmetica continua possono distinguersi cinque principali elementi, dei quali viene la medesima composta. Eccoli tutti in

PROSPETTO

Il primo termine $= a$;
L'ultimo termine $= \omega$;
La differenza comune $= d$;
Il numero dei termini $= n$;
La somma dei termini $= s$;

Dati ora tre di questi cinque elementi, si conosce subito qual sia uno degli altri due incogniti sotto la scorta delle formole seguenti in numero di 20 relative alle due equazioni di sopra indicate (240) $\omega - a = dn - d$; ed all'altra (239) $s = \frac{\omega n + an}{2}$.

ESPOSIZIONE DELLE DETTE 20 FORMOLE

	Date	Si ha	FORMOLE
1ª	ω, d, n		$a = \omega - d(n-1)$.
2ª	ω, n, s		$a = \frac{2s}{n} - \omega$.
3ª	ω, d, s	a	$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left((\omega + \frac{d}{2})^2 - 2ds\right)}$.
4ª	d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$.
5ª	a, d, n		$\omega = a + d(n-1)$.
6ª	a, n, s		$\omega = \frac{2s}{n} - a$.
7ª	a, d, s	ω	$\omega = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(2ds + (a - \frac{d}{2})^2\right)}$.
8ª	d, n, s		$\omega = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}$.
9ª	a, ω, n		$d = \frac{\omega - a}{n - 1}$.
10ª	a, n, s		$d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$.
11ª	a, ω, s	d	$d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$.
12ª	ω, n, s		$d = \frac{2(\omega a - s)}{n(n-1)}$.
13ª	a, ω, d		$n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$.
14ª	a, ω, s		$n = \frac{2s}{a + \omega}$.
15ª	a, d, s	n	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + (\frac{a}{d} - \frac{1}{2})^2\right)}$
16ª	ω, d, s		$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} \pm \sqrt{\left((\frac{\omega}{d} + \frac{1}{2})^2 - \frac{2s}{d}\right)}$

	Date	Si ha	FORMOLE
17ª	a, ω, n		$s = \frac{n(a+\omega)}{2}$.
18ª	a, d, n		$s = n\left(a + \frac{d(n-1)}{2}\right)$.
19ª	a, d, ω	s	$s = \left(\frac{\omega+a}{2}\right)\left(1+\frac{\omega-a}{d}\right)$.
20ª	ω, d, n		$s = n\left(\omega - \frac{d(n-1)}{2}\right)$.

Onde si conosca l'applicazione delle 20 Formole riunite, e classificate nella Tavola, che precede delle progressioni aritmetiche, poniamo quì alcuni problemi, la proposta, e la soluzione dei quali faranno tutto comprendere ad evidenza.

Problema 1.° Si sa da Galilèo nella Teoria del moto de' gravi, che cadendo un corpo da alto per solo impulso della sua gravità, gli spazj, che esso percorre, crescono secondo la progressione aritmetica dei numeri impari 1, 3, 5, 7, ecc. talchè nel primo minuto secondo scorre circa 15 piedi, 45 ne scorre nel minuto secondo, che segue, e così successivamente in progressione aritmetica. Quanto spazio avrà percorso il detto corpo al fine di sei secondi?

Risposta. Questo problema si riduce a trovare la somma di una progressione aritmetica crescente, nella quale si sa, che il primo termine è 15, il numero dei termini è 6, e la loro differenza è 30. Si hanno dunque tre termini, che sono $a = 15$, $n = 6$, e $d = 30$, e si cerca la somma s, la di cui Formola 18ª, che gli corrisponde nella Tavola, è $s = n\left(a + \frac{d(n-1)}{2}\right) =$

$6\left(15 + \frac{30.5}{2}\right) = 540$. Onde il corpo avrà percorso 540 piedi dopo 6 minuti secondi.

2.° Un viaggiatore vorrebbe arrivare in quattro giorni al suo destino, accelerando ogni giorno di tre leghe il suo cammino. Per ottenere l'intento, bisogna che l'ultimo giorno faccia 29 leghe e $\frac{1}{2}$ di viaggio. Quante ne deve fare il primo giorno?

Risposta. In questo problema si ha $\omega = 29\frac{1}{2}$, $d = 3$, $n = 4$, per cui gli corrisponde nella Tavola la Formola 1ª $a = \omega - d(n-1) = 20\frac{1}{2}$, vale a dire che il viaggiatore fece nel primo giorno leghe $20\frac{1}{2}$. Si troverebbe ancora coll'ultima Formola 20, che tutto il viaggio dei quattro giorni è di leghe $100 = s$.

3.° Uno multato per più mesi di seguito ha pagato 6 lire per il primo mese, e 102 lire per l'ultimo: ogni mese la multa cresceva 12 lire. Per quanti mesi ha pagato la multa?

Risposta. Qui sono noti il primo termine $a = 6$ lire, l'ultimo $\omega = 102$ lire, e la differenza $d = 12$ lire, e si cerca n, numero dei mesi, che ha pagata la multa. Onde la Formola, che gli corrisponde nella Tavola è la 13ª $n = 1 + \frac{\omega - a}{d} = 1 + \frac{102 - 6}{12} = 9$: vale a dire, che per 9 mesi ha pagato la multa.

4.° In un cumulo di palle da cannone disposte in progressione aritmetica crescente si suppone, che vi sieno 18 ordini, ciascuno de'quali contenga due palle più del vicino, e che sieno in tutto 360 palle. Si domanda quante ve ne sieno nell'ultimo ordine.

Risposta. Siccome si conoscono d, n, s; quindi la Formola, che gli corrisponde nella Tavola è l'8ª, cioè

$$\omega = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2} = 20 + 17 = 37.$$

5.° Date le medesime cose, quante ve ne saranno nel primo ordine?

$$\textit{Risposta}\ a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2} = 20 - 17 = 3,$$

come dalla Formola 4ª.

Il detto Problema, che colle due dimande, fatte dall'autore Sig. Abate Marie resta diviso in due problemi, può enunciarsi con una sola dimanda così. Date varie serie di palle sino al numero 18, combinate insieme in guisa tale, che cominciando dalla prima in sù, ognuna ne abbia 2 di meno, e tutte insieme facciano la somma di 360; qual sarà il primo, e l'ultimo termine della progressione di esse?

Sia $360 = s$; sia $18 = n$; sia $2 = d$.

Essendo le formole generali relative 8ª, e 4ª,

$$\frac{s}{n} + \frac{dn-d}{2} = \omega\ (8^a);\ \text{sarà}\ \frac{360}{18} + \frac{36-2}{2} = 37.$$

$$\frac{s}{n} - \frac{dn-d}{2} = a\ (4^a);\ \text{sarà}\ \frac{360}{18} - \frac{36-2}{2} = 3.$$

Dal che si deduce, che ω ossia l'ultimo termine della progressione cercata è 37; e che il primo termine della medesima è 3. Laonde sarà la

PROGRESSIONE.

÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37 = 360.

Digitized by Google

PROBLEMA VI.

Un mercante ha venduto 150 canne di stoffo col patto, che debbano pagarsi per la prima canna una lira, per la seconda 2 lire, per la terza 3, e così in progressione aritmetica naturale continua. Quanto importeranno le dette 150 canne?

Quando non si voglia fare uso delle formole indicate, allora la regola, per trovare la somma di tutti i termini di una progressione aritmetica continua, è questa. Devono sommarsi il primo, e l'ultimo termine, quindi moltiplicarne la somma per la metà del numero dei termini, ed il prodotto ci darà la somma cercata, che nel nostro caso è 11325 lire.

La prova si farà con un quesito opposto, dicendo: un mercante ha venduto un certo numero di canne di stoffo per 11325 lire, esigendo 1. lira per la prima canna, 2 per la seconda, 3 per la terza, e così in progressione aritmetica. Quante canne sono state?

Per risaperlo, si raddoppj il prodotto 11325, che dà 22650, di cui si prenda la radice quadrata, che è 150, numero delle canne cercate; avvertendo, che il resto, dopo l'estrazione della radice quadrata, deve trovarsi eguale al quoto, ossia radice trovata, altrimenti vi sarà sbaglio nella operazione fatta.

CAPO QUARTO

Dell' uso delle Proporzioni.

242. La proprietà notissima delle proporzioni, ed insieme utilissima di somministrare il prodotto degli estremi eguale al prodotto dei medj (208); ed il potersi sciogliere ogni prodotto in varj fattori. dei quali una

Digitized by Google

coppia darà sempre gli estremi, ed un' altra coppia i medj di una proporzione, o vicendevolmente (209); ci presentano la teoria, sulla quale principalmente si appoggia ciò, che diremo.

Dati, che sieno due estremi di una proporzione, facilmente si troveranno i medj, sciogliendosi il prodotto degli estremi in altri fattori. Per esempio, dati gli estremi $2 . x :: x : 8$, noi sciogliendo il prodotto di 2×8, che è 16, per 4; avremo i medj cercati, e la proporzione sarà così; $2 : 4 :: 4 : 8$.

243. Se poi si voglia la mezza proporzionale, dovrà estrarsi la radice quadrata dal prodotto degli estremi. Onde dati gli estremi $3 : x :: x : 12$, avremo per mezza proporzionale il 6, che è la radice quadrata del prodotto del $3 \times 12 = 36$: e la proporzione sarà $3 : 6 :: 6 : 12$.

244. Se si cerchi l'ultimo termine, noi l'avremo, moltiplicando i due medj, e dividendone il prodotto per l'estremo noto. Dati dunque $a : b :: c : x$, avremo l'ultimo termine x così $x = \frac{bc}{a}$.

245. Da questa proprietà di potersi sempre trovare un quarto termine di una proporzione, di cui sieno dati gli altri tre, dipende la celebre regola del *Tre*, che chiamasi eziandio *regola d'oro*, per la di lei grande utilità tanto nella vita comune, che nella Matematica pura, e mista.

Deve peraltro attentamente badarsi, che non si creda proporzione, deve in realtà non vi è. Ma quando questa vi sia, noi troveremo sempre esattamente il termine ignoto, moltiplicando i due medj, e dividendone il prodotto per l'estremo noto.

ARTICOLO I.

Della Regola del Tre.

246. La regola del Tre vien così detta dal supporsi sempre in essa noti tre termini, dei quali cercasi il quarto proporzionatamente ad essi. Quindi può definirsi la medesima regola: *La congruenza di tre termini proporzionali, e noti, coi quali può sempre trovarsi il quarto ignoto, che sia proporzionato agli altri tre.*

147. Per rimuovere qualunque difficoltà, che potesse nascere nella regola del Tre, fa d'uopo riflettere, che il termine incognito dipende sempre dalla retta disposizione degli altri tre noti. Affine dunque di disporre rettamente i tre termini dati, deve prima osservarsi quali sieno fra essi gli *omologi* (65), i quali devono porsi sempre ambedue nella medesima parte della proporzione con questa particolarità, che se dalla dimanda rilevasi, che il numero cercato è maggiore relativamente all' altro dato della stessa specie; allora si porrà nel secondo luogo della proporzione il maggiore dei due dati omologi: se poi si rileva dalla dimanda, che l' incognito cercato è minore dell' altro dato della medesima specie; allora l'omologo minore dei due dati sarà quello, che dovrà porsi nel secondo luogo della proporzione. Ciò fatto, si troverà sempre l'estremo incognito, col moltiplicare costantemente i due medj, e col dividerne il prodotto per l'estremo noto.

Per esempio, in questa dimanda: 12 libbre di caffè hanno importato 17 ducati; ora libbre 32 quanto importeranno? 12, e 32 sono i due omologi dati, i quali devono disporsi così; $12 : 32 :: 17 : x$, atteso che rilevasi dalla dimanda, che il prezzo cercato dovrà es-

sere maggiore del 17; che è l'altro dato della medesima specie.

Questa disposizione dei due dati omologi da farsi nel modo indicato serve, a ridurre ad una sola le tre specie della regola del Tre, che ora accenneremo. Giacchè noi opereremo sempre nella stessa maniera qualunque siasi la specie della regola del Tre, a cui appartengono i problemi da sciogliersi.

248. Di fatti la regola del Tre altra dicesi *diretta*, *e semplice*: altra dicesi *inversa*, *e semplice*: ed altra chiamasi *composta*.

Della Diretta, e Semplice.

249. La regola del Tre diretta, e semplice si dice quella, i cui termini sono in ragion diretta, e semplici: vale a dire, che abbracciano sempre quattro sole quantità semplici, le quali sono in ragion diretta fra di loro in guisa tale, che una di queste quantità colla sua relativa possono formare tanto gli estremi, che i medj della proporzione.

Per esempio, 10 libbre di caffè costano 18 ducati; ora 15 libbre quanto costeranno? Questo quesito appartiene alla regola del Tre diretta, e semplice: perchè non abbraccia, che tre cognite, ed una incognita, le quali sono semplici, ed in ragion diretta fra loro. Sicchè in forza di ciò, che si è prescritto su i termini omologi (247), disporremo la proporzione così, $10 : 15 : 18 : x$, cioè che le 10 libbre stanno alle 15 libbre; come il prezzo delle 10 libbre sta al prezzo incognito delle libbre 15. Quindi secondo ciò, che è stato di sopra prescritto (247), moltiplicando i due medj, e dividendone il prodotto per l'estremo noto; avremo nel quoto il va-

lore di x, che sarà 27 ducati: o la proporzione diverrà così $10 : 15 :: 18 : x = 27$.

E quì si noti, che l'effetto sarebbe stato lo stesso, se, senza avere in considerazione i termini omologi la proporzione si fosse ordinata nel suo modo naturale così, $10 : 18 :: 15 : x = 27$.

Della Inversa, e Semplice.

250. La regola del Tre inversa, e semplice si dice quella, i di cui termini sono semplici sì, ma contenenti ragioni inverse. Quindi, secondo l'inversione delle ragioni, questa regola dovrebbe ordinarsi in guisa, che complicato diverrebbe il suo modo di operare per la soluzione dei suoi problemi.

Peraltro si toglierà ogni imbarazzo, col ravvisarne prima gli omologi, e col disporli quindi nel modo, che è stato prescritto di sopra (247): Giacchè, ordinata che sarà in tal guisa la proporzione, per avere l'incognito cercato, si opera sempre come nella regola diretta; moltiplicando i due medj, e dividendone il prodotto per l'estremo noto.

Per esempio, a fare un dato lavoro vi vogliono 6 giorni, perchè se ne facciano 60 canne; per lavorarne 72 canne, quanti giorni vi vorranno? Quì i due omologi dati sono le canne del lavoro. Dunque la proporzione si ordinerà in questa maniera $60 : 72 :: 6 : x = 7\frac{1}{5}$.

Similmente: per coltivare un dato terreno in 6 giorni, vi vogliono 30 giornalieri, per disbrigarlo in giorni 5, quanti giornalieri si richiedono? Anche questo quesito spetterebbe alla regola inversa: si vede di fatti, che scemandosi il tempo, devono crescere gli ope-

rarj, ed in conseguenza le ragioni sono inverse. Ma diviene quesito della regola diretta, per mezzo della prescritta disposizione degli omologi. Onde la proporzione sarà così $5 : 6 :: 30 : x = 36$.

Finalmente un dato numero di soldati in 8 giorni ha consumato 36 misure di biada, in giorni 3 quanta ne consumerà? Quì siccome il termine incognito deve essere minore dell'altro noto della stessa specie; perciò il secondo posto della proporzione l'occuperà l'omologo minore dei due dati. Onde la proporzione sarà così; $8 : 3 :: 36 : x = 13 \frac{1}{2}$.

Se ben si rifletta, troverassi, che siffatta disposizione dei termini omologi viene ricavata dalla natura stessa delle proporzioni, secondo la quale fra i quattro termini proporzionali sta il minore al suo correlativo maggiore; come l'altro minore al suo correlativo maggiore: e viceversa.

Del resto senza questa disposizione degli omologi, la regola del Tre inversa sarebbe non poco imbarazzante per i principianti. Per esempio, il primo quesito, in cui si domanda quanti giorni vi vogliano, per fare 72 canne di un dato lavoro, posto che in 6 giorni ne sieno state fatte 60; secondo la regola inversa, avrebbe dovuto ordinarsi così $6 : 60 :: x : 72$; e quindi moltiplicando i due estremi 72 per 6, dividerne il prodotto pel medio cognito 60.

Della composta.

251. La regola del Tre composta è quella, in cui il quarto termine incognito dipende da più rapporti semplici, i quali fa d'uopo comporli, dopo l'esame della questione, onde trovare l'incognito medesimo.

Sicchè nella regola del Tre composta altro non deve farsi, sennonchè comporre i rapporti semplici, dopo l'esame della questione, e quindi operare, come nella semplice.

Per esempio, 4 uomini in 6 giorni hanno lavorato 36 tese di una data opera; ora 5 uomini in 7 giorni quante tese lavoreranno? Qui si vede bene, che il quarto termine cercato, non dipende dai soli uomini; ma dai uomini, e dai giorni di lavoro insieme. Onde i rapporti non sono semplici, come erano quelli delle regole antecedenti, ma sono bensì composti. Per ridurre dunque questa regola da composta a semplice, si compongano i rapporti, moltiplicando 4 per 6, che dà 24; e 5 per 7, che dà 35.

Ciò fatto, la regola non è più composta, ma semplice: perchè la questione riducesi a questo, di trovare cioè quanto faranno 35 uomini in un dato tempo, posto che 24 uomini nello stesso tempo hanno fatto 36 tese di opera. E la proporzione si ordinerà così $24 : 35 :: 36 : x = 52 \frac{1}{2}$.

Similmente un muratore in 3 giorni, lavorando 8 ore al giorno ha formato 60 canne di un dato muro; ora in giorni 5, lavorando 10 ore al giorno, quante canne ne farà, mantenendosi sempre egualmente attivo?

Si comprende a prima vista, che i 3 giorni a 8 ore di lavoro per giorno altro non sono, che il lavoro di 24 ore; come anche i 5 giorni a 10 ore di lavoro per giorno non fanno, che il lavoro di 50 ore. Si facciano dunque queste riduzioni, moltiplicando il 3 per 8, che dà 24; ed il 5 per 10, che dà 50: ed allora, essendosi ridotta la questione a questo, di vedere cioè quante canne di muro si faranno in ore 50, posto che in ore 24 se ne sieno fatte 60; la proporzione si ordinerà in questo modo $24 : 50 :: 60 : x = 125$.

Digitized by Google

Finalmente se si fosse fatta questa domanda: un muratore in 5 giorni, lavorando 10 ore al giorno, ha fatto 125 canne di muro, se egli lavori 8 ore al giorno, in quanto tempo perfezionerà il lavoro di 40 canne? io moltiplico il 5 per 10, che dà 50, e quindi dico così: se in 50 ore sono state fatte 125 canne di muro; 40 canne in quante ore si faranno? La proporzione sarà come siegue, cioè $125 : 40 :: 50 : x = 16$.

Ora siccome il muratore non lavora, che 8 ore al giorno; quindi divideremo le 16 ore trovate per 8, ed il quoto 2 indicherà, che il muratore in 2 giorni disbrigherà le 40 canne di muro al medesimo prefisse.

ARTICOLO II.

Della regola di Società.

252. Regola di Società si dice quella, che serve a dividere con esattezza il guadagno, o lo scapito di più associati in un negozio. Suol chiamarsi la medesima anche regola di *Compagnia*.

Siccome lo scopo di questa regola è, di dividere un dato numero in più parti, che hanno fra loro dei dati rapporti; quindi è, che in essa si devono formare sempre tante proporzioni, quanti sono i rapporti, ossia il numero degli associati.

Per esempio, tre associati in un negozio hanno guadagnato 60 ducati. Il primo vi aveva impiegato 10 ducati, il secondo ve ne aveva impiegati 3, ed il terzo 2. Qual sarà il guadagno di ognuno?

Si faccia la somma di tutti i capitali impiegati al negozio, che sarà 15: e quindi si facciano tre proporzioni, dicendo nella prima, che stanno tutti i capitali al capitale del primo; come il guadagno totale di tutti

al guadagno parziale del primo associato. Nella seconda proporzione si dirà, che stanno tutti i capitali al capitale parziale del secondo associato; come il guadagno totale di tutti al guadagno parziale del secondo. Nella terza proporzione finalmente si dirà, che il capitale di tutti gli associati sta al capitale parziale del terzo; come il guadagno di tutti al suo guadagno parziale. Sicchè si ordineranno tre proporzioni in questo modo.

$$15 : 10 :: 60 : x = 40.$$
$$15 : 3 :: 60 : x = 12.$$
$$15 : 2 :: 60 : x = 8.$$
$$60.$$

Per comprendere bene la ragione dell' operato, fa d'uopo riflettere, che la regola di società è fondata sul principio altrove spiegato (213), che se si hanno più rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti; come un'antecedente sta al suo conseguente. Per esempio, essendo, come nel nostro caso, il capitale del primo associato al suo lucro; come il capitale del secondo al suo lucro; come il capitale del terzo al suo lucro, ossia $10 : 40 :: 3 : 12 :: 2 : 8$, siccome i rapporti sono eguali; perciò potremo dire, che $10 + 3 + 2 : 40 + 12 + 8 :: 10 : 40$. Vale a dire, che tutti gli antecedenti stanno a tutti i conseguenti; come il primo antecedente al primo conseguente così; $15 : 60 :: 10 : 40$.

E siccome noi vogliamo mettere in proporzione i termini omologi (247); perciò potrà riflettersi, che non si altera punto la proporzione, se si dica, che stanno tutti gli antecedenti al primo antecedente; come tutti i conseguenti al primo conseguente, cioè $15 : 10 :: 60 : 40$.

Similmente tutti gli antecedenti stanno al secondo antecedente; come tutti i conseguenti al secondo conseguente, cioè 15 : 3 : : 60 : 12. E finalmente tutti gli antecedenti stanno al terzo antecedente; come tutti i conseguenti al terzo conseguente, ossia 15 : 2 : : 60 : 8.

253. Accade spesso, che nella Società debba calcolarsi il tempo, durante il quale, ciascun socio ha impiegato il suo capitale. Per esempio in un negozio sono stati guadagnati 460 scudi romani da tre associati, il primo dei quali vi ha impiegato 30 scudi in 12 mesi, il secondo ve n' ha impiegato 50 in 8 mesi, ed il terzo vi ha impiegato 70 scudi in 5 mesi. Per risolvere questo problema, e vedere quanto abbia lucrato ciascuno degli associati, si moltiplichi il tempo per il capitale di ognuno, cioè il 30 per 12, il 50 per 8, ed il 70 per 5. Ciò fatto, si opererà, come si è fatto di sopra, e le proporzioni saranno le seguenti

$$1110 : 360 :: 460 : x = 149,\ 18,\ 4\frac{660.}{}$$

$$1110 : 400 :: 460 : x = 165,\ 76,\ 2\frac{980.}{}$$

$$1110 : 350 :: 460 : x = 145,\ 04,\ 2\frac{580.}{1110.}$$

$$\overline{\quad 460. \quad}$$

254. Essendo, come si è detto di sopra, lo scopo di questa regola quello, di dividere un numero in più parti, le quali abbiano fra loro dei rapporti assegnati; quindi accade spesso, che le date quantità debbano prepararsi, prima di ordinarne le proporzioni, a norma della presente regola di Società.

Per esempio, si debbano dividere 86 ducati fra tre

associati in guisa tale, che la parte del primo stia alla parte del secondo; come 4 : 3, e stia insieme la stessa parte del primo alla parte del terzo; come 5 : 2.

Qui si vede bene, che non si può applicare la presente regola, se con una previa preparazione non si fa sì, che la parte proporzionale di una delle tre parti cercate, come per esempio la parte del primo, non si renda la stessa in ogni rapporto dato.

Ciò si ottiene, col moltiplicare i due termini di ciascun rapporto pel primo termine dell'altro rapporto: vale a dire 4 : 3 per 5, che darà il nuovo rapporto di 20 : 15, e moltiplicare parimente 5 : 2 per 4, che dà il nuovo rapporto di 20 : 8. In tal guisa i due rapporti 4 : 3; e 5 : 2 saranno ridotti ad avere il primo loro termine lo stesso in ambedue: lo che punto non varia il valore di essi rapporti (204).

Con questo apparecchio la questione riducesi a dividere i detti 86 ducati in tre parti, che sieno fra loro come i numeri 20, 15, 8: lo che si fa colle regole di sopra prescritte, ordinando, e risolvendo le proporzioni, come si osserva nell'esempio seguente.

$$43 : 20 :: 86 : x = 40.$$
$$43 : 15 :: 86 : x = 30.$$
$$43 : 8 :: 86 : x = 16.$$
$$\overline{86.}$$

Di fatti facendone la prova, troviamo

$$40 : 30 :: 4 : 3.$$
$$40 : 16 :: 5 : 2.$$

Che se si proponesse di dividere i ducati 86 in

quattro porzioni tali, che stia la prima alla seconda, come 4 : 3, la prima alla terza come 5 : 2, la prima alla quarta come 3 : 1; in tal caso si ridurranno questi rapporti ad avere un medesimo primo termine, col moltiplicare i due termini di ciascuno per il prodotto dei primi termini dei due altri rapporti: vale a dire il rapporto di 4 : 3 lo moltiplicheremo pel prodotto di 5 per 3, che è 15, ed il rapporto verrà 60 : 45. Il secondo rapporto 5 : 2 lo moltiplicheremo pel prodotto di 4 per 3, che è 12, ed il rapporto verrà 60 : 24. Il terzo rapporto 3 : 1 lo moltiplicheremo pel prodotto di 5 per 4, che è 20, ed avremo in fine i nuovi rapporti in luogo dei tre primi come siegue, cioè

$$4 : 3 = 60 : 45.$$
$$5 : 2 = 60 : 24.$$
$$3 : 1 = 60 : 20.$$

Si vede ocularmente, che essendosi ridotti gli assegnati rapporti ad avere tutti uno stesso primo termine; la questione riducesi a dividere gli 86 ducati in quattro parti, che sieno fra loro come i numeri 60, 45, 24, e 20: lo che si fa nella stessa maniera, che è stata di sopra prescritta.

ARTICOLO III.

Della Regola di Falsa Posizione Semplice.

255. La regola di falsa posizione è quella, in cui non essendo state date le quantità, sulle quali essa raggirasi, se ne pongono altre ad arbitrio proporzionatamente a ciò, che dalla questione si enuncia.

Questa regola differisce dalla regola di Società in

Digitized by Google

questo soltanto, che nella regola di Società le parti proporzionali da prendersi sono tutte assegnate, e nella regola di Falsa Posizione si mettono ad arbitrio, secondo i dati, e le condizioni, che nella questione si assegnano.

Per esempio, Pietro, Paolo, e Giovanni hanno scapitato in un negozio 460 ducati. Pietro vi aveva impiegato $1 \frac{1}{2}$ più di Paolo, e Giovanni aveva dato $2 \frac{1}{2}$ più della somma delle altre due porzioni. Qual sarà lo scapito di ognuno?

Siccome non sono state date, sennonchè le ragioni delle somme impiegate dai tre associati al negozio; perciò dobbiamo prendere tre numeri ad arbitrio, i quali abbiano fra loro la data proporzione. Diremo dunque, che Paolo vi ha impiegato 3, ed in conseguenza Pietro avrà dato $4 \frac{1}{2}$, e Giovanni 10: e riducendo tutto a parti mezze, diremo, che Paolo ha dato 6, Pietro 9, e Giovanni 20. Dopo di ciò, opereremo come nella regola di Società o Compagnia così

$$35 : 6 :: 460 : x = 78 \frac{30.}{—}$$

$$35 : 9 :: 460 : x = 118 \frac{10.}{—}$$

$$35 : 20 :: 460 : x = 262 \frac{30.}{35.}$$

$$\overline{460.}$$

Similmente se si proponesse di trovare un numero, di cui il $\frac{1}{3}$, il $\frac{1}{4}$, e il $\frac{1}{6}$ uniti insieme facciano 60; la questione si risolverebbe in questo modo.

Si trovi un numero, che sia divisibile per 3, per 4, e per 6. Io scelgo il 12, di cui il terzo è 4, il quarto è 3, ed il sesto è 2. Ne fo quindi la somma, che è 9, e poi dico: il 9 sta al 12, di cui è parte; come il 60 sta al numero cercato, di cui deve esser parte: ossia $9 : 12 :: 60 : x = 80$.

Dunque l'80 è il numero cercato, di cui il $\frac{1}{3}$, più il $\frac{1}{4}$, più il $\frac{1}{6}$ danno 60. E la ragione specifica dell'operato dipende dalla serie di termini proporzionali, che le accennate parti del 12, che sono 4, 3, e 6, formano col numero cercato in questo modo: cioè il terzo del 12 sta al terzo del numero cercato; come il quarto di esso 12 sta al quarto del numero cercato; come il sesto del medesimo 12 sta al sesto del numero cercato; come l'intero 12 sta all'intero numero cercato: ossia $4 : \frac{1}{3}x :: 3 : \frac{1}{4}x :: 6 : \frac{1}{6}x :: 12 : x$. Ma si è dimostrato (252), che la somma di un certo numero di antecedenti sta ad un'antecedente; come un medesimo numero di conseguenti sta al respettivo conseguente. Dunque diremo nel nostro caso, che 9, numero di tutti gli antecedenti, toltone l'ultimo, sta all'ultimo antecedente 12; come tutti i conseguenti, toltone l'ultimo (i quali nel nostro caso devono fare 60) stanno all'ultimo conseguente: ossia $9 : 12 :: 60 : x = 80$.

Della Doppia Falsa Posizione.

256. La regola di falsa posizione si dice *doppia*, quando, per risolverla, devono prendersi due numeri ad arbitrio proporzionatamente sempre ai dati, che nella questione si assegnano per la soluzione della medesima.

In questa regola possono darsi tre casi, atteso che i due numeri presi ad arbitrio o danno due risultati uno maggiore, e l'altro minore del numero assegnato in questione: o i risultati di essi numeri sono ambedue minori; o finalmente sono ambedue maggiori dello stesso dato numero.

Primo Caso.

Se sieno i risultati dei due numeri presi ad arbitrio uno minore, e l'altro maggiore del numero dato; allora 1.° si moltiplichi il primo numero per la differenza del secondo dal numero dato: 2.° si moltiplichi il secondo numero per la differenza del primo dal dato numero: 3.° si sommino i due prodotti, e se ne formi un dividendo: 4.° si sommino le differenze dei due numeri presi ad arbitrio, e coll' aggregato si divida il detto dividendo, il cui quoto ci darà il numero cercato.

Per esempio, interrogati Pietro, Paolo, e Giovanni della loro età, rispondono, che Paolo ha 2 anni più di Pietro, e che Giovanni ha quanto gli altri due insieme: e tutti insieme hanno 74 anni. Qual sarà l'età di ciascheduno?

Si supponga, che Pietro abbia 10 anni: dunque Paolo ne avrà 12: dunque Giovanni ne avrà 22: dunque tutti insieme avranno 74 meno 30.

Si supponga ora, che Pietro abbia 20 anni: dunque Paolo ne avrà 22: dunque Giovanni ne avrà 42: dunque tutti insieme hanno 74 più 10.

Sicchè moltiplico il primo numero preso ad arbitrio, cioè 10 per la differenza del secondo dal dato 74, che è 10, e dico $10 \times 10 =$ . . . . 100.

Moltiplico poi il secondo numero preso ad arbi-

Digitized by Google

trio, che è 20, per la differenza del primo arbitrario dal dato 74, che è 30, e dieo 20 $\times$ 30 $=$ 600.

Sommo insieme questi due prodotti, ed avendo 700; pongo questo aggregato per dividendo, e lo divido per la somma delle due differenze 30 $+$ 10 $=$ 40: ed il quoto 17 $\frac{1}{2}$ mi darà gli anni di Pietro. Dal che conchiudo, che Paolo deve averne 19 $\frac{1}{2}$, e Giovanni 37 anni. Di fatti uniti insieme formano 74 anni secondo l'esposto della data risposta.

PROSPETTO

Il 1.° num.° $\times$ per la diff.ª del 2.°; 10 $\times$ 10$=$100.

Il 2.° num.° $\times$ per la diff.ª del 1.°; 20 $\times$ 30$=$600.

40 700 | 40
17 $\frac{1}{2}$

Nel quoto dunque di questa divisione abbiamo il numero cercato degli anni di Pietro. La ragione si è: perchè avendo noi con questa divisione tolto dai due numeri presi ad arbitrio ciò, che li faceva differire dal numero cercato; ne siegue per necessità, che il detto quoto sia il numero cercato, come si farà vedere sotto gli occhi sull'esempio medesimo, per non perdere molto tempo in una inutile descrizione, che dovressimo farne, per ispiegare minutamente la cosa. Ci basta per ora lo avere indicata la ragione dell'operato.

Secondo Caso.

Se i risultati dei due numeri scelti ad arbitrio sie-

no ambedue minori del numero dato; l' operazione si farà come nel primo caso con quella sola variazione, che si vedrà nell'esempio seguente.

Interrogati Pietro, Paolo, e Giovanni della loro età, rispondono, che Paolo ha due anni più di Pietro, e Giovanni ha quanto tutti due insieme. Gli anni di tutti poi fanno la somma di 80. Qual sarà l'età di ciascuno?

Si supponga, che Pietro abbia 10 anni: dunque Paolo ne avrà 12: dunque Giovanni ne avrà 22: dunque gli anni di tutti uniti insieme sono 80 — 36.

Si supponga ora, che Pietro abbia 15 anni: dunque Paolo ne avrà 17: dunque Giovanni ne avrà 32: dunque gli anni di tutti uniti insieme sono 80 — 16.

Sicchè moltiplico il primo numero 10 preso ad arbitrio per la differenza del secondo dal numero dato, cioè 10 per 16, che mi dà 160.

Di poi moltiplico il secondo numero 15 preso ad arbitrio per la differenza del primo dal numero dato, cioè 15 per 36, che mi dà 540.

Dopo di ciò sottraggo questi due prodotti il minore dal maggiore, cioè il 160 dal 540, che mi dà per resto o differenza 380.

Quindi sottraggo le due differenze la minore, che è 16, dalla maggiore 36, e ne ho 20 di resto. Finalmente divido il primo resto 380 per questo secondo resto 20, ed il quoto 19 mi darà gli anni di Pietro.

Di fatti se Pietro ha 19 anni, Paolo ne avrà 21, e Giovanni 40, e tutti insieme fanno l'età di 80 anni: come dalla questione si enuncia. La ragione è la stessa, che la ragione, da cui dipende il primo caso. Giacchè in questo secondo caso ancora altro non si è fatto coll'indicate sottrazioni, e divisioni, sennonchè togliere ai due numeri presi ad arbitrio ciò, per cui differivano dal numero cercato.

Digitized by Google

Terzo Caso.

Se il risultato dei due numeri presi ad arbitrio sia in ambedue maggiore del numero dato, si opererà in tutto e per tutto come osservasi nel seguente esempio.

Tizio bramoso di accelerare un suo lavoro pattuisce coi suoi operaj in questo modo. Cioè dice loro, che se lavoreranno consecutivamente senza interrompimento, darà 5 carlini a testa per ogni giorno: ma se sospenderanno il lavoro, leverà 8 carlini a testa per ogni giorno di riposo. Nel termine di 13 giorni si trova ultimato il lavoro, e Tizio non deve dare cosa alcuna ai suoi operaj. Quali saranno stati i giorni di lavoro, e quanti quelli di riposo?

Si supponga, che abbiano lavorato 9 giorni: a 5 carlini al giorno danno . . . . 45.

Essendo i giorni di riposo 4; a 8 carlini al giorno danno . . . . 32.

Dunque Tizio dovrà dare . . . . . . 13.

Suppongasi ora, che i giorni di lavoro sieno stati 10; a 5 carlini al giorno danno . . 50.

Essendo i giorni di riposo 3; a 8 carlini al giorno danno . . . . 24.

Dunque Tizio dovrà dare . . . . . . 26.

Per risolvere dunque la questione, e trovare il numero cercato, 1.° moltiplico il primo numero preso ad arbitrio per la differenza del secondo cioè 9 per 26 = ... 234.

2.° Il 2.° per la diff.ª del primo, cioè $10 \times 13 = 130$.

Ne prendo la loro differenza = . . . 104.

Dopo di ciò sottraggo le due differenze una dall' altra; cioè sottraggo dal 26 il 13, che mi dà 13. Quindi divido il 104 per 13: ed il quoto 8 mi darà il numero dei giorni di lavoro. Dal che deduco, che i giorni di riposo devono essere stati 5, e Tizio nulla deve pagare ai suoi giornalieri.

Poichè 8 giorni a 5 carlini al giorno importano 40 carlini. Ma anche 5 giorni di riposo a 8 carlini al giorno importano 40 carlini. Dunque Tizio nulla deve ai suoi operaj: e si troverà fatto il suo lavoro.

La ragione è sempre la stessa: e si rifletta, che tanto nel 2.°, che nel 3.° caso si opera come nel 1.° con questa sola differenza, che i prodotti, e le differenze, in vece di sommarle, si sottraggono.

Peraltro siffatti problemi potrebbero risolversi con pochissimo imbarazzo così. Si moltiplichino i 13 giorni per i 5 carlini, ed il prodotto 65 diviso per il $5 + 8 = 13$ darà i 5 giorni di lavoro. Se poi voleva sapersi il tempo del riposo; sarebbesi dovuto moltiplicare il suddetto 13 per i 8 carlini: ed il prodotto 104 diviso parimente per il $5 + 8 = 13$ darà i giorni cercati di riposo in numero appunto di 8, come di sopra.

257. Se la regola di doppia falsa posizione voglia trattarsi per le parti proporzionali, tutto sarà facilissimo dietro le poche riflessioni, che quì appresso noteremo, e sono le seguenti.

Sia proposto, per esempio, di dividere 40 ducati fra tre persone in guisa tale, che la seconda persona abbia il doppio della prima, più 4: e la terza abbia il doppio delle altre due più 5.

Per ben comprendere lo stato della questione, convien riflettere, che senza il 4, ed il 5, la questione riducevasi a dividere il 40 semplicemente in parti proporzionali ai numeri, 1, 2, 6. Ma siccome bisogna le-

vare prima dell' operazione 4 ducati per la seconda persona, e 4 più 5, ossia 9 ducati per la terza persona: quindi è, che la questione riducesi a dividere una sola parte dei 40 ducati in parti proporzionali ai numeri 1, 2, 6. Sicchè si operi così.

Si supponga, che la prima persona abbia 1. Dunque la seconda avrà 2 più 4. Dunque la terza avrà 6 + 4 + 5: ed in tutte avranno 22 ducati.

Se non si fosse trattato, che di dividere in parti proporzionali a 1, 2, 6 i ducati 40, essendosi supposto 1 ducato per la prima parte, la seconda parte sarebbe 2, e la terza 6: e la totalità sarebbe 9, la cui differenza dal 22 è 13: questo 13 è ciò, che pria dell' operazione deve levarsi dai proposti 30 ducati, i quali si ridurranno a 27. Resta dunque a dividersi in parti proporzionali ai numeri 1, 2, 7 il 27 per le regole consuete (254). Vale a dire si sommeranno le parti supposte ad arbitrio, e quindi a norma della semplice falsa posizione (255) si faranno queste proporzioni.

$9 : 1 :: 27 : x = 3.$

$9 : 2 :: 27 : x = 6.\ d^e + 4 = 10.$

$9 : 6 :: 27 : x = 18\ d^e + 4 + 5 = 27.$

40 nato da 3 + 10 + 27.

Si vede bene, che in questa regola di doppia falsa posizione trattata per le parti proporzionali, altro non si farà, sennonchè scemare dal numero proposto ciò, che importano i numeri aggiunti, come sarebbero il 4, ed il 5 nel nostro riferito esempio. Nel resto tutto si eseguisce secondo ciò, che suol praticarsi nella regola di Società, o di Compagnia.

Digitized by Google

ARTICOLO IV.

Della Regola Testamentaria.

258. La regola Testamentaria altro non è, sennonchè l'applicazione delle due regole di Società, e di Falsa Posizione alla divisione delle lascite testamentarie.

Noi ne parliamo, non perchè si crede necessaria, ma unicamente, per esercizio delle dette due regole, e per ispiegare col fatto la difficoltà, che recar potrebbero a prima vista i seguenti problemi.

Un padre lascia 60 ducati da ripartirsi a tre suoi figli in guisa tale, che sia $\frac{1}{2}$ pel primo, $\frac{1}{3}$ pel secondo, ed $\frac{1}{4}$ pel terzo. Quanto avrà ciascuno?

Si rifletta prima di tutto, che prendendo del 60 una metà, un terzo, ed un quarto; viene a superarsi il 60 per 5, formando le dette parti 65: lo che non deve accadere.

Per fare dunque la divisione del 60, convien trovare un numero, che sia divisibile per metà, per 3, e per 4, come sarebbe il 12. Quindi si operi come nella Falsa Posizione semplice (255).

$$13 : 6 :: 60 : x = 27\ \frac{9.}{}$$

$$13 : 4 :: 60 : x = 18\ \frac{6.}{}$$

$$12 : 3 :: 60 : x = 13\ \frac{11.}{13.}$$

$$\overline{60}$$

Un padre lascia a tre suoi figli il suo asse da ri-

Digitized by Google

partirsi così, che il primo abbia di tutti i suoi beni $\frac{1}{3}$, il secondo ne abbia $\frac{2}{7}$, ed il terzo abbia il resto, che ascende a 80 dncati. Qual sarà l'asse della eredità, e la parte dei 2 primi?

Siccome i beni lasciati in eredità presentano un numero divisibile per 3, e per 7; quindi io rappresento questo numero per 21, il cui $\frac{1}{3}$ è 7, ed i $\frac{2}{3}$ danno 6. Sicchè il terzo più due settimi di 21 non danno, che 13, vale a dire 21 meno 8. Io dunque dico, che se 8 di resto ossia avanzo, dopo prese le parti dei due primi, mi danno 80 ducati; tutto il 21, che mi darà? Eccolo $8 : 80 :: 21 : x = 210$.

Dunque l'asse creditato somma 210 ducati, il cui terzo è 70, che forma la porzione del primo figlio: i due settimi sono 60, che formano la porzione del secondo: ed il resto 80 dà la porzione del terzo. Di fatti $70 + 60 + 80 = 210$.

Un padre lascia a 4 suoi figli 100 ducati, ed ordina, che il primo ne abbia $\frac{1}{2}$, il secondo $\frac{1}{3}$, il terzo $\frac{1}{5}$, ed il quarto $\frac{1}{7}$. Qual sarà la parte di ognuno?

Prima di tutto deve trovarsi un numero, che sia divisibile per 2, per 3, per 5, e per 7: lo che si ottiene, col moltiplicare consecutivamente fra loro tutti i denominatori dei dati frazionarj, dicendo $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

Sicchè il 210 sarà il numero divisibile per 2, per 3, per 5, e per 7. Si faccia dunque questa divisione, ed avremo per nuovi dati in luogo dei frazionarj 105 pel primo, 70 pel secondo, 42 pel terzo, e 30 pel quarto.

Dopo di ciò si sommino tutte queste nuove quan-

tità, ed avremo 105 + 70 + 42 + 30 = 247. L'operazione si vede bene, che è ridotta ad una falsa posizione semplice (255). Onde tutto sarà risoluto colle seguenti proporzioni.

$$247 : 105 :: 100 : x = 42 \frac{126.}{}$$

$$247 : 70 :: 100 : x = 28 \frac{84.}{}$$

$$247 : 42 :: 100 : x = 17 \frac{1.}{}$$

$$247 : 30 :: 100 : x = 12 \frac{36.}{247.}$$

$$\overline{100.}$$

Un padre lascia a tre suoi figli 60 ducati, e vuole, che se li dividano in questo modo, cioè che la parte del primo stia alla parte del secondo; come 2 : 3; e la parte del secondo stia alla parte del terzo; come 5 : 7. Coerentemente alle passate teorie (254) lo scioglieremo così.

Siccome la parte del secondo è rappresentata prima per 3, e poi per 5; perciò si moltiplichi il primo rapporto 2 : 3 per 5, ed il secondo rapporto 5 : 7 per 3. Allora i rapporti saranno 10 : 15; e 15 : 21, e sarà la parte del primo alla parte del secondo, come 10 : 15, e la parte del secondo alla parte del terzo; come 15 : 21. Si avrà cioè in ambedue i rapporti una parte istessa, che è 15 : e si potrà usare perciò la regola del Tre. Si faccia dunque la somma delle tre parti 10 + 15 + 21, e si operi come altrove si è detto (254), e tutto sarà ultimato nel modo, che segue.

Vale a dire.

$$46 : 10 :: 60 : x = 13 \frac{2.}{}$$

$$46 : 15 :: 60 : x = 18 \frac{72.}{}$$

$$46 : 21 :: 60 : x = 27 \frac{18.}{46.}$$

$$\overline{60}$$

ARTICOLO V.

Della Regola di Combinazione.

259. La regola di Combinazione ha per iscopo di far conoscere le dosi di una mescolanza, le quali sono state date per una determinata quantità, che noi vogliamo accrescere, o diminuire proporzionatamente.

Per esempio, per formare il composto *a* sono state adoperate 5 oncie di una data cosa, 3 oncie di un'altra cosa, ed oncie 2 di un'altra: e da questi tre ingredienti ne è risultato il composto *a* di oncie 10.

Voglia ora formarsi un composto di libbre 3, nel quale gl' ingredienti abbiano fra loro relativamente la medesima proporzione, che hanno i detti tre ingredienti del composto *a* suddetto.

Per effettuare ciò, si faccia la somma delle tre dosi date, e si ponga per primo termine della proporzione, la nuova quantità del composto richiesto si ponga per secondo termine, e per terzo termine si ponga in una proporzione il 5, nell'altra il 3, e nell'altra il 2, come nel seguente esempio, in cui si suppone la libbra di-

visa in 12 oncie, l'oncia in 24 denari, e il denaro in 24 grani. Onde

$$10 : 36 :: 5 : x = 18.$$

$$10 : 36 :: 3 : x = 10, 19, 4\frac{4}{5}$$

$$10 : 36 :: 2 : x = 7, 4, 19\frac{1}{5} \quad (107)$$

$$\overline{36.}$$

Operando noi in questo modo, avremo le nuove dosi per la nuova quantità del composto, che si bramava: e la ragione dell'operato non ha bisogno di dimostrazione alcuna, dipendendo dalla proporzione, che hanno due tutti, i quali risultano da parti fra loro proporzionali (252).

Se il composto, che si desidera debba essere più piccolo di quello, che portano le dosi date, noi opereremo nello stesso modo, come nell'esempio passato.

Per esempio, per formare un medicinale di 12 libbre sono state adoperate 96 oncie di una data cosa, 32 di un' altra, e 16 di un' altra. Ora per formarne uno consimile di libbre 2 $\frac{1}{2}$, quali saranno le dosi da mescolarsi? Eccole.

$$144 : 30 :: 96 : x = 20.$$

$$144 : 30 :: 32 : x = 6\frac{2}{3}.$$

$$144 : 30 :: 16 : x = 3\frac{1}{3}.$$

$$\overline{30}$$

Si vede dunque, che l'operazione è stata la stessa, che quella del primo esempio, altro non essendosi da noi fatto, sennonchè ridurre le date libbre ad oncie, per fare l'operazione, e trovare le dosi del composto.

ARTICOLO VI.

Della Regola di Alligazione.

260. La regola di Alligazione ha per iscopo, di trovare il prezzo medio di più sorti di cose mescolate insieme, delle quali ne sia già cognito il numero, ed il valore speciale di ognuna.

Per esempio, vogliano mescolarsi libbre 6 di argento valutato a 48 ducati la libbra con altre libbre 12 di argento valutato a 36 ducati la libbra. Qual sarà il prezzo medio per una tal mistura?

Diremo noi, che sta la somma di tutte le libbre alla somma dei loro prezzi; come una libbra di tal mistura ad x: e nel caso nostro particolare avremo $18 : 720 :: 1 : x = 40$.

Si verifica una tale operazione, con moltiplicare il prezzo medio trovato per il numero delle libbre date, ed osservare, se torni la somma dei prezzi dati. Di fatti nel nostro caso $18 \times 40 = 720$: ed anche $6 \times 48 = 288$, a cui unito 432 (che è il prezzo delle 12 libbre a 36 ducati la libbra) darà lo stesso prezzo di 720 ducati.

Per esaurire poi tutti i casi spettanti alla regola di alligazione, può qui osservarsi, che o in 1.° luogo non sarà fissata alcuna quantità di quelle, in cui deve farsi l'alligazione: o in 2.° luogo ne sarà fissata una: o in 3.° luogo sarà data la quantità totale dell'alligazione.

Digitized by Google

Primo Caso.

Nel 1.° caso, in cui non è stata fissata quantità alcuna di quelle, in cui cade l' alligazione, opereremo così. Voglia farsi, per esempio, una mescolanza di due vini: uno costi 16 bajocchi il fiasco, e l'altro 6 in modo tale, che il vino misto di entrambi debba valere 10 bajocchi il fiasco. Quali saranno le dosi da mescolarsi? Per risolvere una tal Questione, si scriva prima così

$$10 \left| \begin{array}{ll} 16. & 4. \\ 6. & 6. \\ \hline & 10. \end{array} \right.$$

Dopo di ciò il prezzo medio 10 si paragoni col prezzo infimo 6, e la differenza 4 si scriva in faccia al 16. Di poi si paragoni il medesimo prezzo medio 10 col prezzo massimo 16, e la differenza 6 si ponga sotto l'altra differenza in faccia all'altro 6. Le due differenze avute 6, e 4 saranno le dosi da mescolarsi, per formare un vino da vendersi 10 bajocchi il fiasco.

La ragione si è perchè: avendo fatto un compenso di porre tanto di più del vino, che più si accosta al prezzo medio, quanto di meno di quello, che più si discosta; ne viene per conseguenza, che 10 fiaschi di vino, dei quali 4 sieno del prezzo di 16, e 6 del prezzo di 6, saranno il composto del prezzo medio di 10.

Si verifica questa regola, con osservare, che 4×16, $+ 6 \times 6 = 100$; come anche il medio $10 \times 10 = 100$. Onde tanto vi si ricava, nel vendere i dati vini separatamente, quanto nel venderli nel detto miscuglio.

Si noti peraltro, che essendo il problema indeter-

minato, non i soli numeri 4, e 6 lo sciolgono, ma tutti quei numeri, che hanno la ragione di 4 : 6.

Che se i semplici da mescolarsi fossero tre, si scioglierebbe nello stesso modo, paragonando due volte il prezzo medio col massimo, e scrivendone la differenza una volta in faccia ad uno, ed una volta in faccia dell'altro dei due prezzi inferiori. Quindi si paragonerà lo stesso medio coi due prezzi inferiori, e la differenza si scriverà in faccia al prezzo massimo. E si rifletta, che dei prezzi, che si paragonano, se uno è maggiore del medio, gli altri devono essere tutti minori, e se uno è minore del medio, gli altri devono essere tutti maggiori. Eccone un esempio, che servirà di norma per gli altri casi ancora.

14	16.	2.	8.
	12.	2.	
	6.	2.	
		14.	

Secondo Caso.

Se sia determinata una delle quantità, nelle quali deve farsi l'alligazione, per trovare la ragione della mescolanza, che valga un prezzo medio dato, dovrà usarsi la regola, che si vedrà nell'esempio seguente.

Si supponga, per esempio, che un Cantiniere abbia 4 sole misure di ottimo vino, che vendesi soldi 15 la misura, e voglia mescolarvi del medio, che vendesi a 8 soldi la misura, e dell'infimo, che vendesi a 6 soldi la misura, e ne cerchi un composto da venderlo a 10 sol-

di la misura. Quali saranno le dosi del medio, e dell' infimo? Eccole.

$$10 \left| \begin{array}{ll} 15. & 2. \;\; 4. \\ 8. & 5. \\ 6. & 5. \end{array} \right.$$

$$\overline{16.}$$

Da ciò si dedurrebbe, che per fare un vino da 10 soldi la misura, vi vorrebbero 6 misure dell'ottimo, 5 del medio, e 5 dell'infimo. Ma il caso nostro suppone, che il Cantiniere abbia sole 4 misure dell'ottimo da mescolarsi. Dunque conviene usare la regola del Tre, per trovare le dosi del medio, e dell'infimo corrispondenti alle 4 misure dell'ottimo vino. Onde diremo così

$$6 : 4 :: 5 : x = 3\frac{1}{3}$$
$$6 : 4 :: 5 : x = 3\frac{1}{3}$$

Sicchè avendo il Cantiniere sole 4 misure di ottimo vino del valore indicato, deve mescolarvi misure $3\frac{1}{3}$ del medio, ed altre misure $3\frac{1}{3}$ dell' infimo, per fare un vino da venderlo 10 soldi la misura.

Terzo Caso.

Si cerchi la quantità degli ingredienti; essendo già fissata la quantità del composto. L'esempio seguente farà vedere la condotta, che si deve tenere in tali casi.

Si supponga, per esempio, che un mercante abbia tre specie di caffè, una costi 50 soldi la libbra, l'altra 38, e l'altra 24, e che voglia farne un composto di 64 libbre a 30 soldi la libbra. Quali saranno le dosi da mescolarsi? Eccole nella maniera, che siegue; disponendo ciascun prezzo dato così

$$
30 \left| \begin{array}{lll} 50. & 6. & \\ 38. & 6. & \\ & & \\ 24. & 20. & 8. \\ \hline & 40. & \end{array} \right.
$$

Avremo dunque 40 libbre di caffè, composte da 28 dell'infimo caffè, 6 del mediocre, e 6 dell'ottimo. Ma siccome il quesito richiede, che le libbre del composto sieno 64; convien perciò trovare, per mezzo della regola del Tre, la quantità degli ingredienti proporzionata a libbre 64. Diremo noi dunque così

$$
\begin{array}{l}
40 : 64 :: \ 6 : x = \ 9 \ \frac{3}{5} \\
40 : 64 :: \ 6 : x = \ 9 \ \frac{3}{5} \\
40 : 64 :: 28 : x = 44 \ \frac{4}{5} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 64.
\end{array}
$$

Digitized by Google

ARTICOLO VII.

Della Regola d'Interesse.

261. La regola d'interesse consiste nel fissare la somma dovuta per il denaro dato ad usura, secondo i rapporti, o condizioni fissate nel rispettivo contratto.

Noi dividiamo questa regola in quattro classi, atteso che quattro sono i generi di questioni, che possono in essa trattarsi. Nella 1.ª si tratta dell'interesse, ossia usura del capitale: nella 2.ª si tratta del capitale medesimo: nella 3.ª si tratta del tempo: nella 4.ª si tratta di rinvenire a qual' aggio o usura annuale, o di altra scadenza sia stato dato il denaro.

Esempio per la 1.ª classe. Si domanda qual sia l'interesse di 464 ducati al 6 per cento in quattro anni. Dirò dunque se 100 ducati in un'anno danno 6 ducati; 464 ducati che daranno? ossia 100 : 6 : : 464 : $x = 27.\ 84$. Trovo dunque, che 464 ducati al 6 per cento danno in un anno 27 ducati, e 84 grana, di cui il quadruplo somma 111 ducati, e 36 grana: ed ecco l'interesse cercato di 4 anni.

Esempio per la 2.ª classe. Vuol sapersi, a che si riducano 575 ducati, e 36 grana, somma del capitale coll' aggiunta dei frutti di quattro anni al 6 per cento.

In risposta di ciò, dopo di avere osservato, che 100 ducati coll' aggiunta dei frutti di quattro anni sono ammontati a 124 ducati, dirò così: se 124 si riducono a 100; 575, 36 a che si ridurranno? cioè 124 : 100 : : 575, 36 : $x = 464$. Sicchè 464 ducati sono il capitale, a cui si riducono 575, e 36, dopo toltine i frutti di 4 anni al 6 per 100.

Esempio per la 3.ª classe. Si domanda, in quanti anni la somma di 464 ducati dati al 6 per cento formi

575 ducati, e 36 grana. Per rinvenire ciò, primieramente dai 575, e 36 si sottragga il 464, la cui differenza sarà 111 ducati, e 36 grana. Quindi si cerchi, quanto frutti in un'anno il 464 al 6 per cento, dicendo, se 100 in un'anno dà 6; 464 che darà? cioè 100 : 6 :: 464 : $x = 27$, e 84. E se 27 ducati, e 84 grana si guadagnano in un'anno; 111 ducati, e 36 grana in quanto tempo si guadagneranno? ossia 27, e 84 : 1 :: 111, e 36 : $x = 4$. Dirò dunque, che si guadagnano in quattro anni.

Esempio per la 4^a classe. Dato, che 464 ducati in quattro anni sieno ammontati a 575 ducati, e 36 grana fra sorte principale, e frutti; a qual' aggio o usura sarà stato dato il detto denaro? Primieramente si sottragga dal 575, e 36 il 464, la cui differenza sarà 111, e 36. Siccome 111, e 36 sono l'interesse di 4 anni; perciò lo divido per 4, ed il quoto 27, e 84 mi darà l'interesse di un' anno. Quindi dico se 464 in un anno mi danno 27, e 84; 100 che mi darà, e trovo 6. Poichè 464 : 27, e 84 :: 100 : x, ossia 46400 : 2784 :: 100 : $x = 6$. Sicchè il capitale 464 ducati fu dato al 6 per cento.

ARTICOLO VIII.

Della Regola di Cambio.

262. La regola di Cambio è la stessa regola d'Interesse, il cui scopo è di ragguagliare le Cambiali, nelle quali suol calcolarsi al tanto per cento tanto il lucro, che la perdita di chi fa la girata di esse.

Per esempio, posto, che un banchiere di Roma per una cambiale esigibile in Napoli di 560 ducati prenda il 3 per cento; voglia sapersi quanto prenda in tut-

to; si dirà: se 100 danno 3, 560 quanto daranno? $100 : 3 :: 560 : x = 16$ ducati, e 80 grana: ed ecco ciò, che il banchiere di Roma prenderà in tutto.

Similmente, vuol sapersi cosa si riceverà in Napoli, dando in Roma 560 ducati alla ragione del 3 per cento. Dirò così, se 103 danno 100, 560 quanto daranno? cioè $103 : 100 :: 560 : x = 543$ ducati, e grana 69 $\frac{93}{103}$. Che è quanto si riceverà in Napoli.

ARTICOLO IX.

Della Regola di Sconto.

263. La regola di Sconto consiste nel trovare il ragguaglio esatto di un capitale, detrattone le somme, che saranno state date in isconto di esso.

Per esempio, si è convenuto di pagare dopo un anno 350 scudi romani, somma composta di sorte, e frutti al 6 per cento. Ora se io voglio fare la paga anticipata, cosa dovrò dare?

Per isciogliere la questione, dirò così, se 106 scudi, somma composta del capitale, e del suo annuo interesse, si riducono a soli scudi 100 per motivo dello sconto; scudi 350 a che si ridurranno? ossia $106 : 100 :: 350 : x = 330, 18 \frac{92}{106}$. Io dunque dovrò pagare al presente, in luogo di 350 scudi romani, soli 330 scudi, 18 bajocchi, 4 quattrini, e $\frac{36}{106}$ di un quattrino.

Similmente: si è convennto, che pagandosi prima di un' anno 50 scudi romani, se ne farà lo sconto al 5 per cento. Ora nella scadenza del 73.° giorno viene

a farsi dal debitore questo pagamento, a che si ridurranno i detti 50 scudi romani?

Per risolvere una tal questione, si rifletta, che siccome decorrono i frutti al 5 per cento per tutto il tempo, in cui si ritarda il pagamento dei 50 scudi; quindi è, che il quesito dovrà risolversi, col fare le seguenti proporzioni ricavate dalla natura della cosa.

Dirò dunque, che 365 giorni stanno a 73 giorni; come 5 interesse di un'anno, ossia dei 365 giorni sta all'interesse incognito dei 73 giorni: vale a dire, che $365 : 73 :: 5 : x = 1$.

Quindi dico subito, 105 principale, ed interesse di un'anno sta a 101 principale, ed interesse di 73 giorni; come 50 principale ed interesse di un'anno sta alla somma incognita da pagarsi al 73.° giorno: vale a dire $105 : 101 :: 50 : x = 48$ scudi, 9 bajocchi, e quattrini $2\frac{13}{21}$: lo che è quanto dovrà pagarsi in luogo dei 50 scudi allo scadere del 73.° giorno, in conformità dello stabilito contratto. Laonde si vede bene, che al fine dell'anno va calcolato l'interesse dell'interesse per chi dà il denaro a frutti annui nel modo indicato.

ARTICOLO X.

Della regola di Permute ossia Baratti.

264. La regola delle Permute o Baratti ha per oggetto lo scandaglio, e la equilibrazione del giusto prezzo di ciò, che vien permutato per l'equità del contratto.

Molti sono i casi, che possono darsi in simili contratti. Noi peraltro rapporteremo tre esempj, nei quali si troverà la norma di risolverli tutti dietro qualche pic-

cola riflessione, che potrà richiedere la circostanza del caso, onde l'intavolazione, e i risultati sieno esatti.

ESEMPIO I.

Un mercante ha del caffè, il cui prezzo in contanti è di soldi 5 la libbra, e nel baratto ne vuole 8 soldi la libbra. Al contrario un' altro mercante ha dello zuccaro, il cui prezzo in contanti è di 10 soldi la libbra. Quanto questi dovrà vendere lo zuccaro, per non essere ingannato nel permutarlo a tanto caffè?

In risposta di tal quesito si dirà: se 5 soldi in contanti valgono 8 nella permuta o baratto; 10 soldi quanto valeranno? cioè a dire $5 : 8 :: 10 : x = 16$. Dunque perchè il secondo mercante non resti ingannato, porrà il suo zuccaro alla ragione di 16 soldi la libbra.

ESEMPIO II.

Un mercante ha del grano, il cui prezzo in contanti è di 60 soldi la misura; ma nel baratto ne vuole 80 soldi la misura, e un quarto vuole che sia in contanti. Un' altro mercante ha dell' orzo, il cui prezzo in contanti è di 40 soldi la misura, e vuole barattarlo a tanto grano. Per non essere ingannato a che prezzo dovrà vendere il suo orzo?

In risposta di ciò si rifletta, che sul quarto, che si vuole in contanti dal mercante di grano, non vi cade lesione alcuna. Perciò si prenda il quarto di 80, e si sottragga dal 60, e dall' 80 medesimo: i resti saranno 40, e 60. Si dica dunque: se 40 in contanti valgono 60 nel baratto, 40 quanto valeranno? vale a dire $40 : 60 :: 40 : x = 60$. L'orzo dunque dovrà apprezzarsi nella permuta o baratto a 60 soldi la misura.

Digitized by Google

ESEMPIO III.

Un mercante ha della seta, che costa in contanti 4 soldi l'oncia, ma nel baratto ne vuole 5. Un' altro mercante ha del filo, che costa 13 soldi la libbra in contanti; ma ne vuole 15 soldi nel baratto. Chi dei due Mercanti lucrerà di più?

Per risaperlo dirò così. Se 4 in contanti mi danno 5 nel baratto; 13 in contanti, che mi daranno nel baratto? vale a dire $4 : 5 :: 13 : x = 16 \frac{1}{4}$. Dunque il mercante del filo scapiterà più di un soldo a libbra, e lo guadagnerà il mercante di seta.

Peraltro se il mercante di filo volesse un terzo in contanti, in questo caso chi dei due mercanti guadagnerebbe di più, quello del filo, o quello della seta?

Per risaperlo si prenda il terzo del 15, prezzo voluto dal mercante del filo nella permuta o baratto, e si sottragga tanto dal 13, che da esso medesimo 15. I resti saranno 8, e 10. Dirò dunque se 8 in contanti mi danno 10 nel baratto; 13 che mi daranno? ossia $8 : 10 :: 13 : x = 16 \frac{1}{4}$. Dunque lucreranno egualmente.

ARTICOLO XI.

Del metodo generale per risolvere le regole del 5 *del* 7, *del* 9, *dell'* 11, *e qualunque altra.*

265. La regola del cinque è quella, in cui il numero cercato dipende da due dati. Se poi il numero cercato dipenda da tre dati, la regola si dice del sette. E si dice regola del nove, o dell' undici, se il numero cercato dipenda da quattro, o da cinque dati.

Digitized by Google

Per esempio, 250 ducati in mesi 18 hanno lucrato 30 ducati; ora 640 in mesi 15 quanto lucreranno? Questo quesito appartiene alla regola del cinque: perchè il lucro cercato dipende da due dati.

266. Queste regole possono essere *dirette*, o *inverse*: e sebbene ogni regola inversa possa, generalmente parlando, ridursi a diretta; tuttavia si danno dei casi, nei quali la regola inversa non può ridursi affatto a diretta.

Per conoscere dunque quando sieno dirette, e quando inverse queste regole, fa d'uopo riflettere, che i numeri nei quesiti altri sono *cause*, ed altri *effetti* di esse. Nell' esempio di sopra accennato il lucro è l'effetto, e gli altri numeri sono tutti cause di un tal' effetto.

Ciò posto, se l'effetto ha una sola parte espressa con un sol numero, la regola sarà diretta, qualora si domandi questo solo numero, e questo effetto: che se poi si domandi nel quesito una delle sue cause, la regola sarà inversa.

Sicchè dei tre casi, che possono darsi, uno soltanto forma la regola diretta, ed accade allora, quando il quesito si rapporta all' effetto, il quale abbia una sola parte espressa con un solo numero. Negli altri due casi poi la regola è sempre inversa.

Primo Caso.

La regola sarà diretta, quando il quesito si rapporta all' effetto, il quale sia composto di una sola parte espressa per un solo numero. Per esempio, 5 uomini in 3 giorni, lavorando 6 ore al giorno, fanno 12 tese di opera; ora 7 uomini in 4 giorni, lavorando 8 ore al giorno, quante tese faranno della medesima opera?

Tanto questo, che ogn' altro problema della regola

Digitized by Google

diretta va intavolato così. Il numero solitario, che nel quesito non ha altro simile a sè, si ponga in mezzo; a sinistra gli si pongano le cause, da cui esso dipende; ed a destra si pongano le cause, da cui dipende il numero cercato.

Intavolati, che saranno tali problemi, la soluzione si farà così. Si moltiplichino fra loro tutti i numeri, che sono a sinistra del medio, e se ne noti il prodotto. Di poi si moltiplichino tutti gli altri, cioè il medio con tutti i numeri, che gli sono a destra, e se ne noti il prodotto. Si divida questo secondo prodotto pel primo prodotto, ed il quoto ci darà il numero, che si cercava. Eccone l'esempio.

$$5 - 3 - 6 - 12 - 7 - 4 - 8.$$

Dunque

$$12 \times 7 \times 4 \times 8 \text{ diviso per } 5 \times 3 \times 6 = 29\,\frac{78}{90}$$

Secondo Caso.

Se la regola è inversa, per essere il quesito una delle parti componenti l'effetto, s'intavolerà così. Si ponga nel mezzo il numero solitario simile a quello della domanda; a sinistra si pongano le sue cause, ed indi le parti dell'effetto prodotto dalle cause, sulle quali fondasi la domanda; a destra si pongano le cause, sulle quali fondasi la domanda, e quindi le parti dell'effetto prodotto dalle prime cause.

Da ciò si scorge, che in questa intavolazione altro non si fa, sennonchè *invertire gli effetti*, e scriverli con questo ordine inverso dopo le cause. La soluzione è come la passata.

Digitized by Google

Per esempio, muratori 2 in giorni 3, lavorando 6 ore al giorno, fanno un muro lungo 12 palmi, largo 3, alto 8; ora muratori 4 in giorni 6, lavorando 12 ore al giorno, a quale altezza porteranno un muro lungo 24 palmi, e largo 6? Secondo la regola s' intavolerà così.

mur.	gior.	ore	lun. 2.	lar. 2.	alt.	mur.	gior.	ore	lun. 1.	lar. 1.
2 —	3 —	6 —	24 —	6 —	8 —	4 —	6 —	12 —	12 —	3

Dunque

$8 \times 4 \times 6 \times 12 \times 12 \times 3$ diviso per $2 \times 3 \times 6 \times 24 \times 6 = 16$.

Sicchè i problemi di questo secondo caso ancora si risolvono come quei del 1.° caso, moltiplicando il medio per tutti i numeri a destra, e dividendone il prodotto per lo prodotto dei numeri a sinistra moltiplicati fra loro.

Terzo Caso.

Se finalmente si cerchi una delle cause, il quesito è anche allora della regola inversa: e va intavolato così. Il numero solitario, ossia la causa, di cui cercasi l'altra simile, si ponga nel mezzo; a sinistra si pongano i numeri, che esprimono l' effetto di questa causa, e quindi le concause della causa cercata; a destra poi si pongano i numeri, che esprimono l'effetto, che dipende dalla causa cercata, e quindi le concause della prima causa posta nel mezzo.

Dal che si scorge, che in questo 3.° caso altro non si fa, sennonchè *invertire le concause* nella intavolazione delle medesime. La soluzione poi è sempre la stessa.

Digitized by Google

Per esempio, muratori 4 in 6 giorni, lavorando 12 ore al giorno, portano all' altezza di 16 palmi un muro lungo palmi 24, e largo 6; ora per condurre all' altezza di palmi 8 un' altro muro lungo palmi 12, e largo 3, quanti muratori si richiedono, i quali lavorino giorni 3, e 6 ore al giorno? Diremo dunque

lung.	lar.	alt.	gior.2.	or.2.	mur.	lung.	larg.	alt.	gior.1.	or.1.
24 —	6 —	16 —	3 —	6 —	4 —	12 —	3 —	8 —	6 —	12

Dunque

$4 \times 12 \times 3 \times 8 \times 6 \times 12$ diviso per $24 \times 6 \times 16 \times 3 \times 6 = 2$.

La ragione dell' operato in questi tre casi dipende da questo, che essendosi intavolato ciascun problema secondo la natura della questione, e coerentemente alla natura della questione, essendosene prescritta la soluzione; l'operato non poteva essere altrimenti: come farò sull'esempio stesso osservare.

Volendosi poi sperimentare, se nella operazione siavi occorso alcuno sbaglio, altro non si ha da fare, sennonchè rivoltare la domanda, e vedere, se torni lo stesso numero posto dapprima, come si è fatto da noi nel 2.°, e nel 3.° caso, l'esempio dei quali uno serve di prova all' altro, come apparisce.

Si avverta, che i numeri, che stanno prima del medio, si chiamano *sinistri*, il medio poi e gli altri posti dopo di esso si chiamano *destri*. Ora se fra i sinistri, e i destri vi saranno dei numeri medesimi, potranno cancellarsi. Similmente se un sinistro dividesse esattamente il destro, o viceversa; oppure se un sinistro, ed un destro potessero dividersi per una comune

misura, sarà bene di farlo prima dell' operazione. Eccone l'esempio.

2 . 3 . 6 . 24 . 6 . 8 . 4 . 6 . 12 . 12 . 3.
2 . 0 . 0 . 24 . 6 . 8 . 4 . 0 . 12 . 12 . 0.
0 . 0 . 0 . 24 . 6 . 4 . 4 . 0 . 12 . 12 . 0.
0 . 0 . 0 . 6 . 6 . 0 . 4 . 0 . 12 . 12 . 0.
0 . 0 . 0 . 0 . 6 . 0 . 4 . 0 . 2 . 12 . 0.
0 . 0 . 0 . 0 . 0 . 0 . 4 . 0 . 2 . 2 . 0.

Sicchè con questo vantaggiosissimo artificio si sono fatti sparire tutti i numeri, rimanendo solo a destra 4, 2, e 2, i quali moltiplicati insieme danno 16 che è il numero cercato, e che si sarebbe avuto, operandosi secondo le prescritte regole, come potrà osservarsi nel 2.° caso, di cui era questo appunto l'esempio.

Si avverta ancora, che tali risparmj, o se non altro abbreviazioni di calcoli possono aver luogo in tutte le prescritte regole del capo presente, ed in altre molte operazioni dell'Aritmetica, come in pratica si vedrà. Onde, potendosi, sarà sempre cosa vantaggiosa il farlo.

CAPO QUINTO

DELLE QUANTITA' EQUIDIFFERENTI.

266. Le *Quantità Equidifferenti* appartengono alle Proporzioni Aritmetiche, delle quali abbiamo parlato finora: e sono quelle, che hanno una egual differenza tra loro, come 3, 6, 9, 12 ec. Se nella serie di tre quantità la prima, e la seconda abbiano la stessa differenza, che hanno la seconda, e la terza, come nei numeri indicati 3, 6, 9; le quantità si dicono *Equidifferenti continuamente* ossia di seguito. Se poi nella serie

di quattro quantità si trovi nella prima, e nella seconda la stessa differenza, che è nella terza, e nella quarta, come nei numeri 3, 6, 7, 10; tali quantità si dicono *Equidifferenti separatamente.*

267. Dalla natura di tali quantità si rileva 1.°, che se i termini della serie vanno crescendo continuamente, come 3, 6, 9, 12, 15, 18 ec., il 2.° è l'aggregato ossia la somma del 1.°, e della differenza: il 3.° è l'aggregato ossia la somma del 2.°, e della differenza ec. Se poi i termini della serie decrescono continuamente, il 1.° è l'aggregato del 2.°, e della differenza: il 2.° è l'aggregato del 3.°, e della differenza, come nella serie 18, 15, 12, 9, 6, 3 ec.

268. Similmente nelle quantità, che si dicono *Equidifferenti separatamente*, se i termini crescono, come 3, 6, 7, 10; il 2.° è l'aggregato del 1.°, e della differenza: il 4.° è l'aggregato del 3.°, e della differenza ec. Se poi decrescono, come 19, 16, 13, 10, 7, 6, 3; il 1.° è l'aggregato del 2.°, e della differenza: il 3.° è l'aggregato del 4.°, e della differenza ec. Dalle quali premesse si derivano dei Teoremi, e dei Problemi di molta importanza nella *Stereometria* dei fluidi nelle Botti specialmente.

TEOREMA I.

269. Se diansi tre quantità equidifferenti continuamente, la somma del primo termine, e del terzo è dupla del medio. Poichè dalle cose premesse, e dimostrate, se i termini crescono, il secondo è un composto del primo, e della differenza, ed il terzo è un composto del secondo, e della differenza (267), e perciò del primo, e della differenza dupla. Laonde se al terzo si aggiunga il primo, la somma del primo, e del terzo conterrà

Digitized by Google

il primo duplo, e la differenza dupla: e sarà perciò dupla del secondo, come doveva dimostrarsi: e nello stesso modo si regolerà la dimostrazione, se i termini decrescano.

ESEMPIO

$$\begin{array}{rr} 4.\ 7. & 10 \\ 7. & 4 \\ \hline 14 & = 14 \end{array}$$

270. Quindi se il primo termine sia I, il secondo sia II, il terzo sia III, e la differenza D, eccone la dimostrazione *oculare* nel seguente

PROSPETTO

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{II} = \mathrm{I} + \mathrm{D} \\ & \mathrm{III} = \mathrm{II} + \mathrm{D} \\ \hline \text{Dunque} & \mathrm{III} = \mathrm{I} + 2\mathrm{D} \\ \text{Dunque} & \mathrm{III} + \mathrm{I} = 2\mathrm{I} + 2\mathrm{D} \\ & \qquad\quad = 2\mathrm{II}. \end{array}$$

TEOREMA II.

271. Se diansi quattro quantità equidifferenti, la somma del primo termine, e del quarto è eguale alla somma del secondo, e del terzo. Poichè se i termini crescono, il secondo sarà un composto del primo, e della differenza: ed il quarto sarà un composto del terzo, e della differenza, per le cose dimostrate (268). Laonde se il primo si unisca al quarto, l' aggregato sarà un

Digitized by Google

composto del primo, del terzo, e della differenza. Se poi si unisca il secondo al terzo, l'aggregato sarà un composto del primo, della differenza, e del terzo. Gli aggregati dunque sono eguali tra loro, come doveva dimostrarsi.

ESEMPIO

$$\begin{array}{c} 3-5=8-10 \\ \;\;8 \qquad\quad 3 \\ \hline 13 = 13 \end{array}$$

272. La dimostrazione sarà dello stesso tenore, se i termini, che seguono, saranno minori degli antecedenti: ed eccone la *dimostrazione oculare* nel seguente esempio, in cui I è il primo termine, II il secondo, III il terzo, IV il quarto, e D la differenza.

PROSPETTO

$$\begin{array}{ll} II = I + D & IV = III + D \\ III \quad III & I \quad I \\ \hline II + III = III + I + D & IV + I = I + III + D \end{array}$$

273. Ora colla soluzione di due Problemi daremo un'idea dell'uso da farsi delle spiegate Teorie. Voglia trovarsi il medio equidifferente tra 9 e 13. Si farà in questo modo. Si sommino i due termini 9 e 13, che daranno 22. Si divida questo aggregato per 2, ed il quoto 11 sarà il numero cercato della proporzione 9, 11, 13 (269).

PROBLEMA II.

Dati tre numeri 8, 5, 9, voglia trovarsi il quarto equidifferente. Per ottenere ciò, il secondo numero 5 si unisca al 9. Quindi dall'aggregato 14 si sottragga il primo numero 8, ed il residuo 6 sarà il quarto equidifferente cercato della nuova proporzione, che sarà 8, 5, 9, 6, (271).

In fine della nostra Geometria, pagina 174, nell' ultimo Problema 26 in essa esposto su la maniera di rinvenire il contenuto di una, o più Botti, si trova l'applicazione della presente dottrina delle quantità equidifferenti. Ma il detto Problema non è, che un'esempio.

CAPO SESTO

DELLA NATURA, E DELL'USO DEI LOGARITMI.

274. *Logaritmo* è una voce formata da due vocaboli del greco idioma, i quali significano *ragione*, e *numero*, vale a dire *ragione di numero*.

275. Sono dunque i Logaritmi una serie di numeri in progressione aritmetica, i quali corrispondono termine per termine ad una simil serie di numeri in progressione geometrica. Eccone l'esempio.

$$
\begin{array}{l}
\dot{\div}\ 1.\ 2.\ 4.\ 8.\ 16.\ 32.\ 64.\ 128. \\
\div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ \ 7.
\end{array}
$$

In questo esempio scorgesi ocularmente espressa la natura dei Logaritmi. Poichè si vede a colpo d'occhio, che i numeri della progressione posteriore aritmetica costituiscono i Logaritmi della progressione superiore geometrica. Onde 0 è Logaritmo di 1; 1 è Logaritmo

di 2; 2 è Logaritmo di 4; 3 è Logaritmo di 8; 4 è Logaritmo di 16 ec.

Dal che si vede bene, che il Logaritmo è un numero di una progressione aritmetica, il quale corrisponde ad un' altro numero di una progressione geometrica, come nella definizione si è detto.

L'utile scoperta de'Logaritmi è dovuta a Giovanni Nepero Barone Scozzese morto nel VI secolo dell' Era Cristiana. Enrico Briggs, Adriano Wlacq, ed altri molti ne perfezionarono il lavoro: e fra i moderni il celebre Gardiner, François Callet, ed altri ce ne presentano le migliori Tavole, che sono corredate di assai utili teorie.

ARTICOLO I.

Della proprietà dei Logaritmi.

276. Per comprendere la proprietà dei Logaritmi, quali si trovano nelle Tavole ordinarie, si pongano una sotto dell'altra due progressioni una geometrica, e l'altra aritmetica in guisa tale disposte, che la geometrica cominci dall' unità, e l'aritmetica da zero, e si corrispondano una all'altra termine per termine in tutta l'estenzione così

$$\div\!\!\div 1: 2: 4: 8: 16: 32: 64: 128.$$
$$\div\ 0.\ 3.\ 6.\ 9.\ 12.\ 15.\ 18.\ 21.$$

In tutti i respettivi termini di queste due progressioni si osserva costantemente una perfetta corrispondenza fra loro. Per esempio nel 32 della progressione geometrica trovasi, la ragione 2 essere fattore di esso 32 cinque volte; come cinque volte la ragione 3 è contenuta nel 15, che è il termine, che nella progressione

aritmetica gli corrisponde. E se si moltiplichi, per esempio, il 32 per 2 nella progressione geometrica, e nella progressione aritmetica si sommino i correlativi termini 3, e 15; si troverà, che nella somma 18 è contenuta tante volte la stessa ragione 3, quante volte nel prodotto 64 è fattore la ragione 2: si troverà cioè, che anche la somma, ed il prodotto suddetto sono due termini, che si corrispondono in queste progressioni.

277. Se dunque voglia sapersi, qual sia il prodotto di due termini qualunque della progressione geometrica; basta solo, che si sommino i respettivi termini della progressione aritmetica: giacchè il termine, che nella progressione geometrica corrisponde alla somma di essi, sarà il prodotto cercato. Per esempio, se voglia sapersi il prodotto di 64 per 2; si sommino i respettivi termini 18, e 3 della progressione aritmetica, e nel 128 correlativo all' aggregato 21 avremo il prodotto, che si cercava.

278. Se poi si fosse dovuto dividere il 64 per 2, bastava sottrarre dal 18 l'altro correlativo 3, e nel 32, che corrisponde alla differenza 15, si sarebbe trovato il quoto, che cercavasi.

279. Ora siccome i numeri naturali componenti la prima colonna delle Tavole Logaritmiche sono stati ricavati da una progressione geometrica, che comincia dall'unità, e siccome i loro Logaritmi sono i termini corrispondenti di una progressione aritmetica cominciante da zero; conchiudiamo per questo, che sommandosi i Logaritmi di due numeri, si ha il Logaritmo del loro prodotto, e sottraendosi il Logaritmo del divisore dal Logaritmo del dividendo, si ha il Logaritmo del quoto nel numero, che corrisponde alla differenza di essi.

Su questi principj poggia tutta la dottrina dell'uso, che suol farsi dei Logaritmi, e con un poco di rifles-

Digitized by Google

sione sul tenore delle operazioni se ne apprende la pratica, e se ne spiega quindi adeguatamente la ragione.

ARTICOLO II.

Dell'uso dei Logaritmi.

280. Essendo proprietà dei Logaritmi il far sì, che la moltiplicazione, e la divisione si riducano a semplici somme, e sottrazioni; la elevazione alla potenza seconda, terza ec. si riduca ad una moltiplicazione facilissima per 2, per 3 ec.; la estrazione delle radici quadrate, cubiche ec. si riduca ad una facilissima, ed agevole divisione per 2, per 3 ec.; fa d'uopo mostrare in questo Articolo qual sia l'uso di tutto ciò.

281. Immaginatevi una progressione geometrica, come questa $\div\div$ $a.^0$ $a.^1$ $a.^2$ $a.^3$ $a.^4$ $a.^5$ $a.^6$ ec. Se voglia moltiplicarsi qualunque di questi termini con qualunque altro, avremo il prodotto in quel termine, che avrà per esponente la somma dei due fattori. Onde $a^2 \times a^4 = a^6$. Se qualunque termine voglia dividersi per qualunque altro, avremo il quoto in quel termine, che avrà per esponente l'esponente del dividendo meno quello del divisore. Laonde sarà $a^5 : a^2 = a^{5-2}, = a^3$, come rilevasi dalle passate teorie esposte ne'numeri (137), e (138).

282. Chiaramente si scorge, che mentre le quantità formano una progressione geometrica, i loro esponenti formano una progressione aritmetica. Tali esponenti sono i Logaritmi delle quantità, alle quali essi appartengono.

283. Si ponga ora $a = 10$: avremo la progressione coi respettivi suoi valori espressi nella progressione posteriore in questa maniera, cioè

$$∺ 10^{0}.\ 10^{1}.\ 10^{2}.\ 10^{3}.\ 10^{4}.\ 10^{5}.\ 10^{6}.\ \text{ec.}$$

ossia

$$∺ 1.\ 10.\ 100.\ 1000.\ 10000.\ 100000.\ 1000000.$$

Negli esponenti da zero fino a 10 abbiamo i Logaritmi di tutti gli articoli primarj dei numeri, ossia dei numeri interi in progressione decupla. Onde zero è Logaritmo dell'unità; 1 è Logaritmo di 10; 2 è Logaritmo di 100; 3 è Logaritmo di 1000, e così di tutti gli altri esponenti: come si osserva nel riferito esempio.

284. Ma siccome bisognano ancora i Logaritmi dei numeri intermedj 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ec., come anche delle frazioni; perciò a tutti i medesimi esponenti si sono aggiunte 7 note decimali, per lo che la formola delle progressioni si convertisse in quest' altra formola, che siegue, vale a dire

$$∺ 10^{0.0000000}\ 10^{1.0000000}\ 10^{2.0000000}\ 10^{3.0000000}\ \text{ec.}$$

Il 10 elevato alla potenza indicata sarà in progressione geometrica, nel mentre che gli esponenti sono in progressione aritmetica. Facendo ora noi così

$$∺ 10^{0.0000001}\ 10^{1.0000002}\ 10^{2.0000003}\ 10^{3.0000004}\ \text{ec.},$$

saranno i valori del 10 elevato alle respettive potenze in progressione geometrica, mentre gli esponenti o Logaritmi sono in progressione aritmetica; e nell'aumento, ossia nella lentissima progressione di una 10. milionesima per volta fino a 9999999 si trovano i Logaritmi di tutti i numeri intermedj 2, 3, 4, 5, ec. o accurati, o prossimamente vicini.

285. Per ottenere ciò, convien trovare le mezze proporzionali aritmetiche fra i Logaritmi, e le geome-

triche fra le quantità affette dei medesimi, fintanto che avremo il dato numero colle decimali, che abbiamo scelte, e ridotte tutte a zero.

Ne abbiamo un' esempio in Wlacq, dove si trova il Logaritmo di 9 con 26 operazioni. Una tal fatica peraltro è necessaria solamente nei numeri primi, vale a dire in quei numeri, i quali non hanno divisore.

286. Abbiamo delle Tavole, che portano il lavoro sino a 20 decimali, ma per lo più bisognano le prime cinque. I Logaritmi dei numeri da 1 fino a 10 hanno per prima nota 0: da 10 fino a 100 hanno per prima nota 1 : da 100 fino a 1000 hanno 2, e così prosieguono tutti ad avere la prima nota in ragion decupla progressivamente.

287. La detta prima nota chiamasi *Caratteristica*, ed indica quante figure abbia il numero corrispondente, che saranno le unità caratteristiche più uno.

Dalle accennate ipotesi, e teorie facilmente si comprende quali sieno gli usi delle tavole logaritmiche, e quali sieno ancora le ragioni dei medesimi usi.

288. Si è già osservato, che volendosi moltiplicare due quantità, si sommeranno i Logaritmi dei fattori, e questa somma sarà il Logaritmo del prodotto. Per esempio, volendosi moltiplicare 14 per 13, si prenda il Logaritmo di 14, che è 1, 146128, e si prenda ancora il Logaritmo di 13, che è 1. 113943. Se ne faccia la somma, che sarà 2. 260071, il cui Logaritmo è 182 : ed ecco il prodotto cercato.

289. Volendosi eseguire la divisione per mezzo dei Logaritmi; dovrà sottrarsi quello del divisore da quello del dividendo, e la differenza ci offrirà il Logaritmo del quoto.

290. Volendosi operare colla regola del Tre, per trovare un quarto proporzionale; dall'aggregato dei me-

dj sottrarremo il Logaritmo del primo termine, e questa differenza ci darà il Logaritmo del quarto termine, che si cercava.

291. Volendosi innalzare un numero a qualunque potenza; si moltiplichi il Logaritmo del numero dato per l'esponente della medesima potenza, e così avremo il Logaritmo corrispondente al numero elevato alla potenza, che si cercava.

292. Volendosi estrarre da un numero dato la radice; si divida il di lui Logaritmo per l'esponente della detta radice, e così avremo il Logaritmo corrispondente ad esso dato numero.

La ragione di tutte queste operazioni si comprende facilmente, dopo avere ben' inteso ciò, che si è detto nel numero 276, unitamente alle altre teorie, ed ipotesi spiegate fin quì.

Possono però nascere delle difficoltà. Possono in primo luogo risultare dei Logaritmi, i cui numeri non si trovino nelle Tavole, ed in secondo luogo possiamo aver bisogno dei Logaritmi, che non sono nelle Tavole.

ARTICOLO III.

Dei Logaritmi, i cui numeri non sono nelle Tavole.

293. Allorchè risultano dei Logaritmi, i cui numeri non sono nelle Tavole, possono darsi due casi: cioè che o il Logaritmo risultante dalle operazioni è maggiore di quei sviluppati nelle Tavole; o sebbene non sia maggiore, non corrisponde esattamente. Nel primo caso è segno, che il numero corrispondente è maggiore del numero posto nelle Tavole, e nel secondo caso è se-

Digitized by Google

gno, che il numero corrispondente al nostro Logaritmo ha qualche frazione.

294. Alla frazione propria corrisponde un Logaritmo negativo. Poichè essendo il denominatore maggiore del numeratore, cioè il divisore maggiore del dividendo; e dovendosi sottrarre quello del denominatore da quello del numeratore, per avere la frazione; la differenza sarà necessariamente negativa.

Per trovare poi la quantità corrispondente ad un tal Logaritmo negativo, si prenda il Logaritmo ultimo delle Tavole, che nell' Wlacq è quello di 10000, e si paragoni con esso il dato Logaritmo, cioè si sottragga esso da quello di 10000, ed il Logaritmo corrispondente alla differenza sarà il numeratore della frazione cercata, ed il suo denominatore sarà 10000. Eccone un esempio.

Se si proponesse di trovare la frazione corrispondente ad un Logaritmo negativo, come — 0.3679767; converrebbe sottrarre questo dato Logaritmo dall'ultimo delle Tavole, che viene ad essere

$$\begin{array}{r} 4.0000000. \\ 0.3679767. \\ \hline 3.6320233. \end{array}$$

Di questa differenza o resto si cerchi nelle Tavole il numero corrispondente, che è $4285\,\frac{71}{100}$. Di questo numero si faccia una frazione, a cui si dia 10000 per denominatore, e diverrà essa così $\frac{428571}{10000}$, e questa sarà la frazione cercata.

La ragione di così operare si rileva dalla nota pro-

porzione derivata dalla proprietà della divisione (31), che l'unità sta al quoto; come il divisore al dividendo. Poichè, ciò posto, avremo nel nostro caso l'unità alla frazione, come il denominatore al numeratore. Se dunque si sommi il Logaritmo della frazione, ed il Logaritmo del denominatore, avremo il Logaritmo del numeratore. Avendo noi dunque supposto per denominatore il 10000, avremo la frazione in parti dieci millesime, ed il numeratore sarà il numero corrispondente alla detta somma dei Logaritmi.

295. Quando la frazione è spuria, il Logaritmo non è negativo, e questa frazione spuria, come vedremo or'ora, corrisponde ad un' intero con l'aggiunta di una frazione vera, (298).

296. Se risulti un Logaritmo maggiore di quei sviluppati nelle Tavole (293); potrà sempre trovarsi un numero ad esso corrispondente: purchè non sia eccessivamente grande, e diviso per 10000, non dia un quoto, che sia esso ancora maggiore dei numeri delle Tavole.

Per ottenere ciò, si sottragga il Logaritmo del divisore, che si vuol prendere, dal Logaritmo cognito del dividendo ignoto, e trovato il quoto, che corrisponderà all'accennata differenza dei Logaritmi, si moltiplichi esso per il divisore trovato, ed il prodotto ci darà il numero incognito corrispondente al Logaritmo maggiore di quei, che sono posti nelle Tavole accennate. Eccone un esempio.

Si debba trovare il numero corrispondente ad un Logaritmo maggiore di quelli delle Tavole, come del Logaritmo 7.7589982. Noi opereremo così. Sottraggasi dal Logaritmo dato il Logaritmo di 10, oppure 100, ovvero quello di 1000, od anche di 10000, il primo in somma di quella specie, che darà il resto di un numero di caratteri tali, che si trovino nelle Tavole.

Digitized by Google

Per esempio, il numero 10000 ha per Logaritmo suo corrispondente 4.0000000. Sottratto questo Logaritmo dal Logaritmo proposto, avremo questo resto

$$\begin{array}{r} 7.7589982. \\ 4.0000000. \\ \hline 3.7589982. \end{array}$$

Si trovi di questo resto considerato come Logaritmo il numero corrispondente, che è 5741 $\frac{11}{100}$. Si moltiplichi questo numero per 10000, ed il prodotto 57411100 sarà il numero, che si cercava.

Che se la differenza trovata dei Logaritmi non corrisponda esattamente al Logaritmo di qualche numero delle Tavole, è segno evidente, che il nostro quoto oltre il numero intero include qualche frazione.

Siccome il denominatore di questa frazione sarà sempre il numero corrispondente al Logaritmo sottratto, giacchè era Logaritmo del divisore; sarà ben fatto, che si scelga, per sottrarsi, il Logaritmo di un'articolo primario, come sarebbe del 10, del 100, del 1000 ec., acciocchè le frazioni prendano un'aspetto decimale.

Per trovare dunque una frazione da aggiungersi all'intero nel caso accennato, convien badare, se sia il numero corrispondente ad un numero di caratteristica 1, o pure 2, od anche 3 ec. Nel primo, e secondo caso è facilissimo. Si vada a cercare il medesimo numero sotto la caratteristica massima delle Tavole, e le note numeriche, che avanzano a man destra, saranno i numeratori della frazione decimale.

Che se poi il dato Logaritmo abbia la caratteristica 3, ed in conseguenza il numero ad essa corrispon-

dente, debba cercarsi fra il 1000, e il 10000; l'operazione sarà un poco più complicata. Si trovi nelle Tavole il Logaritmo prossimamente minore, e prossimamente maggiore del dato, e se ne noti la differenza. Quindi si trovi la differenza del dato, ed il prossimamente maggiore.

Ciò fatto dicasi: la differenza prima sta alla seconda; come 100, od anche 1000, oppure altro articolo primario maggiore sta alle centesime, alle millesime ec. cercate. Il quoto proporzionale sarà allora il numero della frazione decimale, che doveva aggiungersi all'intero.

ARTICOLO IV.

Dei numeri, i cui Logaritmi non sono nelle Tavole.

297. Che se avremo bisogno dei Logaritmi maggiori di quei, che sono nelle Tavole; potremo avere questi ancora, purchè il numero corrispondente ad essi non sia 10000000. Sia il dato numero, per esempio, 92375. Si tolgano le prime quattro note a sinistra, che sarebbero 9237, e si cerchi nelle Tavole il Logaritmo corrispondente a questo numero tolto, che è 3.9655309. Si sottragga questo Logaritmo da quello, che lo siegue immediatamente nelle Tavole, cioè da 3.9655780, e si avrà in questo caso, come nell'operazione seguente,

$$
\begin{array}{r}
3.9655780. \\
3.9655309. \\
\hline
0.0000471.
\end{array}
$$

Di poi si prenda la quantità rimasta, dopo tolte le accennate quattro note, la quale nel nostro caso è 5,

e si faccia quindi questa proporzione: come 10 differenza fra i numeri 92380, e 92370 corrispondenti a questi due Logaritmi consecutivi sta alla differenza trovata 471 dei predetti Logaritmi; così 5 resto del numero proposto sta alla differenza logaritmica, che si cercava. Avremo cioè la proporzione $10:471::5.x=235$.

Ciò fatto, al Logaritmo del 92370, che è 3.9655309, si aggiunga la differenza logaritmica trovata 235, ed avremo 3.9655544. Finalmente si aumenti la caratteristica 3 di tante unità, quante sono le figure rimaste a destra nel numero proposto, che nel nostro caso è una solamente, cioè il 5. Dunque la caratteristica 3 sarà accresciuta di una unità, ed avremo il Logaritmo così 4.9655544: e questo sarà il valore del Logaritmo, che era stato richiesto.

PROSPETTO

3.9655780.
3.9655309.

471.d^e $10:471::5:x=235$ d^e

3.9655309.
235.

3.9655544.d^e
1.

4.9655544.

La ragione di questa operazione è, che le differenze di tre numeri a, b, c, allorchè queste differenze sono piccolissime, sono tra loro presso a poco, come le differenze dei loro Logaritmi.

Digitized by Google

298. Per trovare il Logaritmo di un numero intero unito alla frazione, si deve prima ridurre l'intero a fratto, e quindi sottrarre dal Logaritmo del numeratore quello del denominatore. Onde $6\,\frac{5}{12}=\frac{77}{12}$ (66), ed ha per Logaritmo il 1.886491 meno il Logaritmo 1.079181, come apparisce dalle seguenti Tavole.

TAVOLE LOGARITMICHE DA 1. A 89.

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
0		18	1,255273	36	1,556303	54	1,732394	72	1,857332
1	0,000000	19	1,278754	37	1,568202	55	1,740363	73	1,863323
2	0,301030	20	1,301030	38	1,579784	56	1,748188	74	1,869232
3	0,477121	21	1,322219	39	1,591065	57	1,755875	75	1,875061
4	0,602060	22	1,342423	40	1,602060	58	1,763428	76	1,880814
5	0,697970	23	1,361728	41	1,612784	59	1,770852	77	1,886491
6	0,778151	24	1,380211	42	1,623249	60	1,778151	78	1,892095
7	0,845098	25	1,397940	43	1,633368	61	1,785330	79	1,897627
8	0,903090	26	1,414973	44	1,643453	62	1,792392	80	1,903090
9	0,954243	27	1,431364	45	1,653213	63	1,799341	81	1,908485
10	1,000000	28	1,447158	46	1,662758	64	1,806180	82	1,913814
11	1,041393	29	1,462398	47	1,672098	65	1,812913	83	1,919078
12	1,079181	30	1,477121	48	1,681241	66	1,819544	84	1,929419
13	1,113943	31	1,491362	49	1,690196	67	1,826075	85	1,929419
14	1,146128	32	1,505150	50	1,698970	68	1,832509	86	1,934498
15	1,176091	33	1,518514	51	1,707570	69	1,838849	87	1,939519
16	1,204120	34	1,531479	52	1,716003	70	1,845098	88	1,944483
17	1,230449	35	1,544068	53	1,724276	71	1,851258	89	1,949390

Le Teorie spiegate fin qui sono del tutto sufficienti, per passare con felice riuscita alla Geometria, e Trigonometria, come faremo nel 2.° volume, che segue.

FINE DELL'ARITMETICA E DELL'ALGEBRA.

INDICE DELL'OPERA

PAG.	LIN.	ERRORI	CORREZIONI
49	19	527,7583888	52,7583888
111	13	si dividerà	si ridurrà
121	12	analisi è stato	è stata
180	7	ed i $\frac{2}{3}$	ed i $\frac{2}{7}$
187	6	| 16	16

Mag 2005434

IMPRIMATUR

Fr. Dom. Buttaoni Ord. Praed. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Ioseph Canali Archiep. Coloss. Vicesg.

Digitized by Google